ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 27 JANVIER 1958.

PRÉSIDENCE DE M. PAUL MONTEL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

GÉOCHIMIE. — *Métamorphisme, énergie solaire et données thermiques sur la terre.*

Note de M. RENÉ PERRIN.

J'ai émis, il y a déjà de longues années [1] l'idée que le métamorphisme résultait de diffusions chimiques, d'échanges d'ions ou de molécules entre les terrains sédimentaires et les couches sous-jacentes. La croûte initiale externe était en équilibre, mais les altérations et les classements dus à l'action des agents atmosphériques, à la vie et à l'érosion ont entraîné le dépôt de couches sédimentaires successives, hors d'équilibre entre elles et avec le substratum.

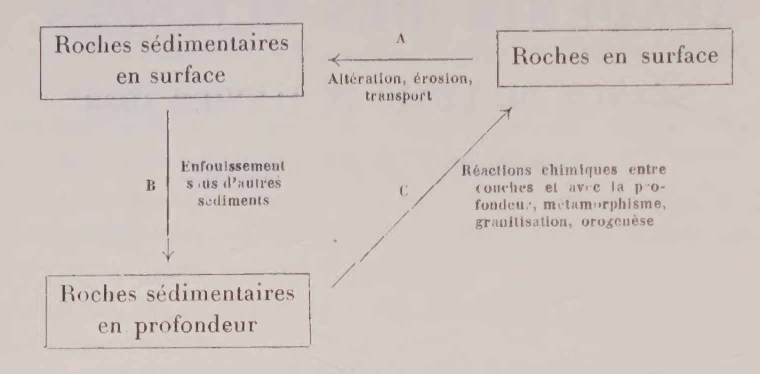
<u>Comptes-rendus des séances de l'Ac. des Sciences</u> - N°4 - 27.1.58

" Propriétés magnétoélectriques des lames minces de nickel aimantées à saturation "
par Mme Th. RAPPENEAU
(Mise au point)
pp. 571/574 - 2 fig. 1 tabl. 2 réf.

" Etude des propriétés magnétiques d'une série d'alliages nickel-cuiv
par A.J.P. MEYER
et C. WOLFF
(Mise au point)
pp. 576/579 - 3 fig. 6 réf.

" Etude et compensation de l'inhomogénéité du champ magnétique d'un électroaimant "
par H. BENOIT
et M. SAUZADE
(Etude expérimentale)
pp. 579/582 - 3 fig. 4 réf.

Mes théories peuvent ainsi être illustrées par le schéma ci-dessous :



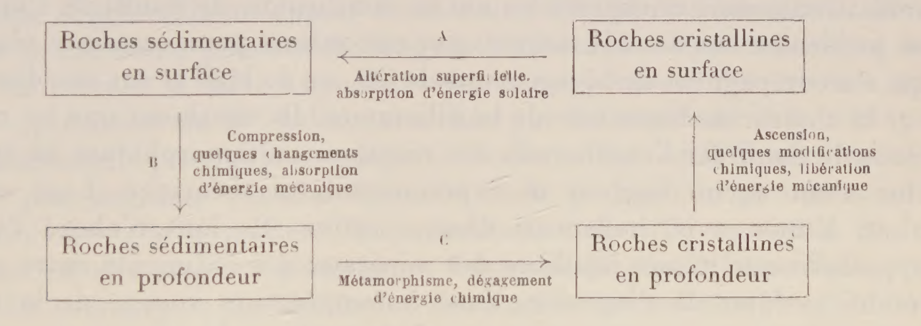
Dans son récent Ouvrage, P. Laffitte ([3]) a eu le mérite de faire des remarques très importantes à ce sujet : 1° l'énergie mécanique nécessaire pour l'orogenèse et les déformations ne représente qu'une faible part, 10 % en moyenne de celle qui est nécessaire pour échauffer les roches jusqu'aux températures qui paraissent nécessaires pour expliquer le métamorphisme profond et la granitisation; elle est en outre relativement faible vis-à-vis des énergies mises en jeu par les réactions chimiques (cette dernière conclusion, à laquelle j'étais arrivé également, sans la publier, montre que la conception : réactions chimiques facteurs d'orogenèse, n'est en tous cas pas dénuée de fondement scientifique); 2° que l'ordre de grandeur des énergies thermiques intervenant dans les dites réactions semble capable de produire des échauffements de plusieurs centaines de degrés.

Il s'est étonné à juste titre qu'une question aussi fondamentale pour la pétrographie que celle de l'exothermie ou l'endothermie des réactions correspondant au métamorphisme n'ait pas encore fait, à sa connaissance, l'objet d'études approfondies. Il a cependant ajouté, en cours d'impression, qu'un article récent de V. A. Saull ([4]) traitait de ce problème. Saull pense que nombre de transformations observées dans le métamorphisme sont exothermiques; il se base pour ce faire, et sur certaines données de chaleur de formation, et sur des considérations théoriques que je résumerai ainsi : Les lois thermodynamiques veulent que, si l'on raisonne en système clos, le métamorphisme se traduise par une diminution de l'ensemble de l'énergie libre F dans les terrains intéressés, mais $\Delta F = \Delta H - T\Delta S$ (si l'on admet la pression constante).

Les matériaux constituants des terrains sédimentaires : argiles, limons, colloïdes, schistes, ont une structure plus désordonnée que celle des minéraux de métamorphisme : micas, amphiboles, feldspaths. Il est à présumer de ce fait que leur entropie est plus grande. Par suite, $T\Delta S$ est certainement positif, et pour que ΔF soit négatif, il est obligatoire que ΔH soit

largement négatif, c'est-à-dire que les réactions correspondantes soient nettement exothermiques. Il faut tenir compte, en outre, des dégagements de chaleur importants dus à la recristallisation métamorphique. Si les vitesses de réaction sont suffisantes, les dégagements de chaleur par unité de volume peuvent dépasser les pertes par conductibilité : il se produit dès lors une augmentation de la température et celle-ci à son tour accroît dans des proportions considérables les vitesses de réaction dans les solides. il se produit ainsi une autocatalyse thermale : l'allure des phénomènes s'amplifie. En sens inverse, les phénomènes d'altération superficielle des roches, y compris leur désagrégation, sont endothermiques; s'ils peuvent s'effectuer néanmoins, c'est que l'energie nécessaire à leur accomplissement est fournie par les effets mécaniques et thermiques de l'eau et des vents, et donc en définitive par la chaleur solaire.

Saull arrive ainsi à la conception de cycles géologiques fermés, qui ne nécessitent aucun apport d'énergie venant de l'intérieur de la terre; il n'exclut cependant pas la possibilité d'un tel apport. L'énergie chimique dégagée au cours du métamorphisme correspond essentiellement à la libération de l'énergie solaire emmagasinée lors de l'altération superficielle des roches, causée par les agents atmosphériques ou la vie, et de la sédimentation. Il schématise ainsi le cycle :



Mis à part les échanges avec la profondeur, que, je le répète, Saull n'exclut pas, un tel schéma est très similaire à mes propres conceptions, mais Saull a explicité cette idée, qui me paraît féconde, que finalement l'énergie libérée, lors du métamorphisme et de l'orogenèse, est d'origine solaire; elle correspond à la libération de l'énergie accumulée auparavant, lors de l'érosion et de l'altération superficielle. C'est, à la réflexion, une conséquence implicite de mes conceptions, mais que je n'avais, personnellement, point dégagée. De même que l'action solaire, par l'intermédiaire de la biosphère, s'est traduite par une accumulation d'énergie potentielle, sous forme de charbon et de pétrole, de même de façon plus générale son action directe, ou indirecte par l'action des organismes vivants, conduit à une accumulation d'énergie potentielle dans les sédiments, en faux

équilibre entre eux et avec la profondeur. Cette énergie est libérable le jour où un retour vers l'équilibre physicochimique s'effectue : le métamorphisme, la granitisation, le volcanisme et l'orogenèse en sont les conséquences. A température ordinaire le charbon est en faux équilibre avec l'air; si l'on élève sa température, sa combustion se produit et est exothermique. La publication de Saull a entraîné une discussion intéressante. Tout d'abord, deux savants russes, V. I. Lebedev et N. V. Belov, ont revendiqué leur priorité. Ils ont effectivement, parallèlement à Saull, considéré que les réactions de métamorphisme étaient exothermiques, en s'appuyant essentiellement sur des considérations théoriques : distances et caractères de liaison entre Al et O dans le cas de coordination 4 (roches plutoniques), ou de coordination 6 (sédiments) et attiré l'attention sur l'accumulation d'énergie solaire dans les minéraux de surface; enfin Lebedev a considéré (1953) que le métamorphisme était une source probable de mouvements tectoniques, ce qui, entre parenthèses, me permettrait, à mon tour, de revendiquer une priorité déjà ancienne (1935).

Un autre savant russe, D. S. Korzhinsky, a fait des objections aux affirmations de ses compatriotes (1954) tout en citant certaines réactions de déshydratation exothermique. De leur côté, H. Ramberg, K. O. Bennington et W. K. Week reconnaissent l'exothermie des recristallisations, mais critiquent les autres conclusions de Saull; ils s'appuient en particulier sur des ΔH mesurés par eux-mêmes pour certaines réactions, qui s'accompagnent de dégagements de CO_2 ou de H_2O et sur une discussion sur la chaleur de formation de la sillimanite. Ils concluent que les conceptions de Saull sur l'exothermie des réactions métamorphiques en système clos n'ont aucun support ni expérimental, ni théorique. Leur critique n'est, à mon avis, nullement démonstrative. Ils font d'abord l'énorme hypothèse que le non équilibre des minéraux des sédiments entre eux est rétabli pendant la diagenèse, donc à température voisine de la température ordinaire, sans justifier cette hypothèse de grande importance. En outre, les faits qu'ils citent ont trait, ou à des réactions d'ordre extrêmement secondaire dans le métamorphisme en général, ou à des réactions purement théoriques, comme la décomposition de la muscovite en orthose, alumine et eau, etc.

Le même Ramberg a d'ailleurs mis l'accent aux excellents arguments à l'appui, sur le fait que les alcalins ont tendance en système clos à se concentrer dans les phyllo et surtout tectosilicates, et Fe, Mg dans les méta et orthosilicates, du fait de l'exothermie des réactions correspondantes, ce qui, en réalité, est un argument en faveur des conceptions de Saull, ce d'autant plus qu'une telle concentration n'est nullement réalisée dans la diagenèse.

Pour ma part, je tendrai à dire : en système clos, je considérerais le

raisonnement de Saull sur l'équation $\Delta F = \Delta H - T\Delta S$ comme probablement valable à pression constante, mais il n'y a pas de système clos en pétrographie, et la discussion sur un tel système me paraît assez vaine. Comme toujours, il faut se rapporter à l'observation : 1° l'altération superficielle n'est évidemment pas un système clos, car les eaux ruissellent; 2° dans le métamorphisme, même relativement superficiel, CO_2 et H_2O ont migré; 3° l'observation montre, en outre, que dans le métamorphisme plus intense, la migmatisation, la granitisation, il y a apport de certains corps, tels que les alcalins, départ d'autres, tels que Fe, Mg. Lors de la granitisation d'une roche à séricite ou muscovite, on ne retrouve pas l'excès d'alumine sur place; elle a migré pour entrer dans un minéral d'autre composition chimique, de même Fe, Mg, dans la granitisation d'une roche à hornblende, chlorite ou biotite, etc. C'est l'exothermie ou l'endothermie des réactions correspondantes, et non de réactions théoriques, qui constituent la clé.

Si l'on veut clore le système, il faut étendre très loin ses limites.

Si exothermie il y a, comme le laisse prévoir le raisonnement de Ramberg, sur alcalins et ferromagnésiens, l'autocatalyse thermale et un certain emmagasinement d'énergie solaire apparaissent une conclusion logique. L'endothermie, en présence des immenses volumes gneissifiés, migmatisés, granitisés, supposerait un apport de chaleur extérieur extrêmement considérable et entretenu pendant de longues périodes; cet apport aurait à la fois à subvenir à la forte augmentation de température des terrains, et à la compensation de la chaleur absorbée par les réactions. Les conceptions anciennes : proximité de magmas fondus, colonnes filtrantes, ascension de pore-solutions chaudes émanant de la profondeur, permettraient peut-être une telle hypothèse. La substitution partielle ou totale de la granitisation aux magmas granitiques, l'absence de grands fronts basiques qui exclut le transport par circulation de solutions ascendantes, les données sismologiques, ne permettent plus, à mon avis, même en tenant compte de la radioactivité, de concevoir une source raisonnable de chaleur permettant l'accomplissement de réactions endothermiques d'une telle ampleur.

Ainsi l'observation géologique me semble prouver que dans le système non clos que représentent les couches externes de l'écorce, l'autocatalyse thermale et l'emmagasinement d'énergie solaire sont une réalité.

Mais alors, cette conception appelle certaines conséquences importantes sur lesquelles je voudrais attirer l'attention : l'évolution des êtres vivants observables montre que la température superficielle de notre globe s'est maintenue en moyenne sensiblement constante depuis plus d'un milliard d'années.

Cette température résulte de la différence entre, d'une part, la somme des apports : quantité de la chaleur solaire qui reste disponible après

l'absorption sous forme d'augmentation d'entropie et de vie végétale ou animale, flux thermique venant de la profondeur, radioactivité, et, d'autre part, la perte par rayonnement, elle-même influencée par les écrans nuageux. Si l'on suit ces vues nouvelles, il faut reconnaître que cette extraordinaire constance de la température pendant d'immenses durées, qui, seule, a permis une évolution aboutissant jusqu'à l'Homme, n'a pu être réalisée que grâce à une certaine constance d'une différence : la différence entre la quantité d'énergie solaire absorbée et emmagasinée par l'altération superficielle, l'érosion, la sédimentation, la vie d'une part et, d'autre part, la quantité restituée par les phénomènes métamorphiques, orogéniques et volcaniques, qui agissent sur le flux thermique. Ces deux quantités ont été elles-mêmes inégales dans l'espace et dans le temps.

La proportion d'énergie solaire absorbée et accumulée à chaque instant du fait de l'altération est influencée par le rapport des surfaces océaniques aux surfaces continentales, la forme de celles-ci (déserts intérieurs), les couvertures glaciaires, la vie, etc., et la quantité d'énergie restituée est fonction elle-même de l'intensité, variable au cours des époques géologiques et d'une région à l'autre, des processus chimiques et de leurs conséquences. Il n'apparaît donc pas absurde de penser que ces phénomènes d'absorption et restitution, d'importance respective variable à chaque instant et dans l'espace, ont joué un rôle dans l'évolution des climats au cours des âges. A titre d'exemple, en se limitant seulement à l'accumulation due à l'altération et à la désagrégation, il est intéressant de constater qu'une couverture glaciaire étendue en diminue l'importance et doit donc normalement conduire à une élévation lente mais progressive de la température, une part plus grande de l'énergie solaire étant consacrée à cet usage; un abaissement devrait réciproquement être la conséquence d'une forte fonte des glaces accompagnée d'érosion puissante.

Quant aux restitutions, elles se traduisent non seulement par la chaleur apportée par certaines eaux thermales et les laves, mais également du fait de l'action des réactions chimiques internes sur le degré géothermique et le flux thermique.

Une autre conséquence de ces vues est, en effet, qu'il est, pour le moins, imprudent d'extrapoler à partir des degrés géothermiques superficiels connus, d'ailleurs très variables, pour tenter de calculer les températures dans les couches profondes du globe, puisque, sans parler de la radioactivité, les couches relativement externes sont l'objet de dégagements de chaleur, provenant pour une grande part d'énergie solaire accumulée. Il n'est pas à exclure que cette zone superficielle ne donne lieu, au moins localement, à un flux thermique, tant vers l'intérieur, que vers l'extérieur. Un tel fait est, en particulier, plausible dans le cas des volcans, véritables abcès sous-cutanés. Il ne paraît pas possible de négliger cette

sorte de vie physicochimique de l'extérieur de la croûte, qui continue de nos jours, et est source de calories, et de se borner à des calculs d'ordre uniquement mécanique et de transmission de chaleur, basés sur des données de surface, pour tenter d'en inférer ce qui existe en profondeur.

Pour moi ces réflexions me confirment, surtout si l'on tient compte de l'influence relativement superficielle de la radioactivité, dans la tendance qui est déjà la mienne depuis quelques années, à savoir qu'il n'y a pas lieu de s'étonner outre mesure si les ruptures brusques des séismes à épicentres situés à 600 km et la propagation d'ondes transversales sont en faveur de l'existence de roches cristallines solides jusqu'à de très grandes profondeurs. Les seuls magmas approchant ou atteignant la surface sont issus de refusion, telles les laves.

(1) R. PERRIN, *Extrapolation à la géologie des données métallurgiques* (*Annales des Mines*, 1934).

(2) R. PERRIN, *Le métamorphisme générateur de plissement* (*Annales des Mines*, 1935).

(3) P. LAFFITTE, *Introduction à l'étude des roches métamorphiques et des gîtes métallifères*, 1957.

(4) V. A. SAULL, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 8, 1955, p. 86-106.

PHYSIQUE COMÉTAIRE. — *Présence des raies interdites de l'oxygène dans les spectres cométaires*. Note de MM. **Pol Swings** et **Jesse L. Greenstein**.

L'examen de la région rouge de nombreux spectres cométaires, par exemple dans l'*Atlas of Representative Cometary Spectra* (1) nous a conduits à penser que les raies interdites rouges de OI, λ 6 300,23 et 6 363,88 pourraient bien être présentes dans les comètes; le cas de la raie verte λ 5 577 semblait moins clair. L'étude de spectres de comètes récentes pris à plus haute résolution et, en particulier, de spectres de la comète *Mrkos* (1957 *d*) obtenus à l'Observatoire Palomar (27 Å/mm) nous a convaincus que les raies de [OI] sont bien émises par les comètes.

La plupart des spectres cométaires couvrant la région rouge révèlent des émissions proches de λ 6 300 et 6 364 dont l'intensité décroît au fur et à mesure qu'on s'éloigne du noyau et qui ne peuvent être attribuées à l'émission nocturne ou crépusculaire de [OI]. Les bons spectrographes astronomiques ne présentent pas de dégradé; c'est le cas, en particulier, du spectrographe Coudé du Palomar. D'ailleurs, on peut facilement constater sur de nombreux spectres cométaires que la distribution le long des raies λ 6 300 et 6 364 ne peut pas être un simple effet photographique dû à la superposition d'émissions crépusculaires ou nocturnes et d'un continuum sous-jacent.

En fait, il existe une forte émission de NH_2 en λ 6 300; il s'agit essen-

tiellement des transitions intenses de la branche Q, $4_{-3} — 4_{-4}$, $5_{-4} — 5_{-5}$ et $6_{-5} — 6_{-6}$ de la transition (0, 8, 0) → (0, 0, 0). Cette émission, comme toutes les autres du radical NH_2, est concentrée dans la région centrale de la tête; dans cette région, on ne pourra, sans doute, jamais séparer les émissions de NH_2 et de [OI]. Mais, à partir d'une certaine distance du noyau, l'émission est due uniquement à [OI]. L'examen de nombreux clichés montre aussi que, très fréquemment, cette émission de [OI] n'a pas l'uniformité de distribution en longueur requise pour une émission crépusculaire ou nocturne, mais est, au contraire, bien due à la comète. C'est le cas notamment sur les clichés Palomar de la comète *Mrkos*, où l'émission λ 6 300 s'étend dans la direction de la queue tout à fait comme le doublet D de Na.

Aux environs de λ 6 364, on n'observe, à faible résolution, qu'une seule radiation cométaire. Mais, à dispersion plus élevée, on trouve deux raies qui, sur les spectres du Palomar, ont les longueurs d'onde λ 6 360,43 et λ 6363,87. La première est la raie $3_{-1} — 4_{0}$ de la bande (0, 8, 0) → (0, 0, 0) de NH_2. Quant à la seconde, elle ne coïncide avec aucune raie de NH_2, ni avec aucune autre émission moléculaire; en revanche, elle correspond exactement à [OI] 6 363,88. Sur les clichés du Palomar, l'émission 6 363,9 due purement à [OI] appartient exclusivement à la comète, sans contribution crépusculaire ou nocturne appréciable.

Le cas de la raie verte, λ 5 577, est moins frappant. Cette raie tombe au sein de la bande (1, 2) de C_2. A faible résolution, on ne peut séparer la raie verte dans les parties de la tête où sont émises les bandes de C_2, mais elle apparaît sur certains clichés, à plus grande distance du noyau. Sur les spectres de la comète *Mrkos* pris au Palomar, une émission est observée en λ 5 577,28, à mi-chemin entre deux raies de C_2, λ 5 575,6 et 5 578,6. Il s'agit bien de la raie verte de [OI]; aucune autre identification satisfaisante n'est possible. La raie verte est nettement plus faible que les raies rouges.

Il est donc bien établi que les raies interdites de [OI] sont émises par les comètes; [OI] apparaît à des distances du noyau semblables à Na, nettement plus grandes que NH_2. Comme Na, [OI] s'étend dans la direction de la queue.

Cette émission de [OI] est-elle due à une résonance excitée par le rayonnement électromagnétique solaire ou à un bombardement par des particules solaires, ou encore à un processus plus compliqué comme on a envisagé pour expliquer l'émission [OI] crépusculaire ? Par analogie avec les bandes cométaires de CN, CH, OH et NH dont l'excitation fluorescente pure a été démontrée, on est tenté d'attribuer l'émission [OI] au même mécanisme de résonance. Cette question pourra être résolue par des études théoriques. En tout cas, il n'y a aucune difficulté à expliquer la présence d'atomes

abondants d'oxygène qui peuvent provenir de la photodissociation de nombreuses molécules parentes.

(1) P. SWINGS et L. HASER, *Atlas of Representative Cometary Spectra*, Liège, 1956.

M. **PAUL PASCAL** fait hommage à l'Académie des tomes III et IV du *Nouveau traité de Chimie minérale* publié sous sa direction.

M. **ROGER HEIM** présente un Ouvrage de feu **RENÉ MAIRE**, Membre non résidant de l'Académie, intitulé : *Flore de l'Afrique du Nord*. Volume IV : *Monocotyledonæ : Glumifloræ : Cyperaceæ, Principes, Spathifloræ, Commelinales*. Cet Ouvrage constitue le volume LIII de l'*Encyclopédie biologique*.

M. **SALOMON LEFSCHETZ** adresse en hommage à l'Académie son Ouvrage : *Differential equations : geometric theory* qui constitue le volume VI de la série *Pure and applied mathematics*.

M. **HENRI MILLOUX** adresse en hommage à l'Académie une brochure intitulée : *Augustin Cauchy*.

L'Ouvrage suivant est présenté par M. **PIERRE TARDI** :

Publications techniques de l'Institut géographique national. *Optique appliquée et Photographie*, par JEAN CRUSET.

PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de candidats à la place de Membre titulaire vacante au Bureau des Longitudes par la mort de M. *Guillaume Grandidier*, pour la première ligne, M. *Pierre Tardi* obtient 59 suffrages contre 4 à M. *Jean Vignal*.

Pour la seconde ligne, M. *Jean Vignal* obtient 50 suffrages. Il y a 7 bulletins blancs.

En conséquence, la liste présentée à M. le Ministre de l'Éducation Nationale de la Jeunesse et des Sports, comprendra :

En première ligne.............. M. **PIERRE TARDI**.

En seconde ligne............... M. **JEAN VIGNAL**.

DÉSIGNATIONS.

M. **Arnaud Denjoy** est désigné pour représenter l'Académie à la Cérémonie organisée le 28 janvier à la Maison de l'UNESCO, au cours de laquelle le **Prix Kalinga** sera remis à M. *Bertrand Russell.*

CORRESPONDANCE.

L'Académie est informée de l'**International Conference on co-ordination chemistry**, qui aura lieu à Londres, du 6 au 11 avril 1959.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° AcademiaRepublicii populare Romine. *Biblioteca de chimie.* I. *Despre teoria proceselor de polimerizare și polimerizarea acetineenei,* par O. F. Solomon;

2° id. *Biblioteca de zootehnie si medicina veterinara.* I. *Piroplasme și piroplamoze,* par Constantin C. Cernăianu. Vol. I;

3° id. C. I. Parhon. *Opere alese.* Vol. II. *Psihologie și psihiatrie;*

4° Elie Carafoli. *Aerodinamica vitezelor mari (Fluide compresibile);*

5° Tudor Tănăsescu. *Manual de tuburi și circuite electronice.* Vol. II;

6° Lucia Mîrza. *Influenta anemiilor acute și repetate și a compresiunii cerebrale asupra activitatii nervoase superioare la animale.*

Il signale également deux fascicules polycopiés :

1° Faculté des sciences de Paris. *Séminaire de théories physiques dirigé par M. Louis de Broglie.* 26e année : 1956-1957;

2° Documentation mathématique. Textes publiés sous la direction de Paul Belgodère. Fasc. 30 — 38. *État des périodiques figurant à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré.* Liste dressée par Madeleine Estève à la date du 15 décembre 1957.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur certaines fonctions arithmétiques.* Note de M. **Hubert Delange**, présentée par M. Paul Montel.

Extension, au moyen d'une nouvelle méthode de démonstration, de résultats établis précédemment sur des fonctions arithmétiques définies simplement à partir de certains ensembles de nombres premiers.

1. E étant un ensemble de nombres premiers, nous désignons par $\omega_E(n)$ le

nombre des diviseurs premiers de l'entier n qui appartiennent à E, et par $\Omega_E(n)$ le nombre total des facteurs appartenant à E dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Dans des travaux précédents ([1]), nous avons étudié les fonctions ainsi associées aux ensembles E satisfaisant à l'hypothèse suivante, que nous désignerons par (H) :

Il existe un nombre positif α et une fonction $\delta(s)$ holomorphe dans le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geq 1$, tels que l'on ait pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p^s} = \alpha \log \frac{1}{s-1} + \delta(s).$$

Nous avons établi en particulier les résultats suivants :

1° Soit f l'une des fonctions ω_E et Ω_E qui correspondent à un ensemble E satisfaisant à l'hypothèse (H).

a. q étant un entier > 1 et r un entier quelconque, l'ensemble des entiers positifs n satisfaisant à $f(n) \equiv r \pmod q$ possède une densité égale à $1/q$, et l'ensemble des entiers positifs « quadratfrei » et satisfaisant à la même condition possède une densité égale à $(1/q)(6/\pi^2)$.

b. λ étant un nombre irrationnel quelconque, pour tout t réel satisfaisant à $0 \leq t \leq 1$, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leq t \quad ([2])$$

possède une densité égale à t, et l'ensemble des entiers positifs quadratfrei satisfaisant à la même condition possède une densité égale à $(6/\pi^2)t$.

2° Soient f l'une des fonctions ω_{E_1} et Ω_{E_1} et g l'une des fonctions ω_{E_2} et Ω_{E_2}, E_1 et E_2 étant deux ensembles sans élément commun satisfaisant l'un et l'autre à l'hypothèse (H).

a. q et q' étant deux entiers > 1 et r et r' deux entiers quelconques, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$f(n) \equiv r \pmod q \qquad \text{et} \qquad g(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $1/qq'$, et l'ensemble des entiers positifs quadratfrei et satisfaisant aux mêmes conditions possède une densité égale à $(1/qq')(6/\pi^2)$.

b. λ et μ étant deux nombres irrationnels quelconques, quels que soient t et t' réels satisfaisant à $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq t' \leq 1$, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leq t \qquad \text{et} \qquad \{\mu g(n)\} \leq t'$$

possède une densité égale à tt', et l'ensemble des entiers positifs quadratfrei satisfaisant aux mêmes conditions possède une densité égale à $(6/\pi^2)tt'$.

3° Soit E un ensemble satisfaisant à l'hypothèse (H).

a. q et q' étant deux entiers > 1 *et premiers entre eux*, et r et r' deux entiers quelconques, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$\omega_E(n) \equiv r \pmod{q} \qquad \text{et} \qquad \Omega_E(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $1/qq'$.

b. λ et μ étant deux nombres irrationnels tels que l'équation $\lambda x + \mu y = z$ n'ait pas d'autre solution en entiers rationnels que $x = y = z = 0$, quels que soient t et t' réels satisfaisant à $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq t' \leqq 1$, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$\{\lambda\omega_E(n)\} \leqq t \qquad \text{et} \qquad \{\mu\Omega_E(n)\} \leqq t'$$

possède une densité égale à tt'.

Le but de la présente Note est en premier lieu d'indiquer que *tous les résultats précédents restent vrais si l'on remplace l'hypothèse* (H) *par la suivante, plus générale et d'un caractère moins artificiel et que nous désignerons par* (H_1) ([3]) :

Il existe un nombre positif ou nul α tel que le nombre des nombres de E *au plus égaux à x soit égal pour x tendant vers $+\infty$ à*

$$\alpha \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right],$$

et, si $\alpha = 0$, on a

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty.$$

La démonstration consiste à établir les résultats suivants :

1° Si l'ensemble E satisfait à l'hypothèse (H_1), quel que soit z tel que $|z| \leqq 1$ et $z \neq 1$, on a pour x infini

$$\sum_{n \leqq x} z^{\omega_E(n)} = o[x], \qquad \sum_{n \leqq x} z^{\Omega_E(n)} = o[x]$$

et, Q étant l'ensemble des entiers positifs quadratfrei,

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in Q}} z^{\omega_E(n)} = o[x].$$

De plus, quels que soient u et v satisfaisant à $|u| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$, avec $uv \neq 1$, on a pour x infini

$$\sum_{n \leqq x} u^{\omega_E(n)} v^{\Omega_E(n)} = o[x].$$

2° Si E_1 et E_2 sont deux ensembles sans élément commun satisfaisant l'un et l'autre à l'hypothèse (H_1), et si f est l'une des fonctions ω_{E_1} et Ω_{E_1}, et g l'une des fonctions ω_{E_2} et Ω_{E_2}, quels que soient u et v satisfaisant à $|u| \leqq 1$ et $|v| \leqq 1$,

avec $u \neq 1$ *ou* $v \neq 1$, on a pour x infini

$$\sum_{n \leq x} u^{f(n)} v^{g(n)} = o[x] \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} u^{f(n)} v^{g(n)} = o[x].$$

Ajoutons qu'on peut obtenir aussi des résultats concernant les entiers assujettis aux mêmes conditions que plus haut et en outre à $n \equiv l (\operatorname{mod} k)$, à condition d'introduire une hypothèse sur la répartition des nombres de E satisfaisant aux différentes congruences de la forme

$$p \equiv m \pmod{k'}, \quad \text{où} \quad k' = \frac{k}{(k, l)} \quad \text{et} \quad (k', m) = 1.$$

2. Tous les résultats mentionnés au paragraphe précédent se déduisent du théorème général suivant, qui est d'ailleurs susceptible d'autres applications.

Soit $h(n)$ une fonction arithmétique réelle ou complexe possédant les propriétés suivantes :

1° $h(1) = 1$;

2° *quel que soit* n, $|h(n)| \leq 1$;

3° *on a* $h(nn') = h(n)h(n')$ *toutes les fois que* $(n, n') = 1$.

Supposons qu'il existe un nombre réel ou complexe ρ tel qu'on ait pour x infini

$$\sum_{p \leq x} h(p) \log p = \rho x + o[x] \quad (^4)$$

et, si $\rho = 1$, supposons en outre que $\sum [1 - \mathcal{R} h(p)]/p = +\infty$.

Alors on a pour x infini

$$\sum_{n \leq x} h(n) = o[x] \quad \textit{et} \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} h(n) = o[x].$$

(1) *Ann. scient Éc. Norm. Sup.* (3), 73, 1956, p. 15-74; *Colloque sur la théorie des nombres*, Bruxelles, 19, 20 et 21 décembre 1955, p. 147-161; *Illinois Journal of Mathematics*, 1957.

(2) Nous désignons ici par $\{x\}$ l'excès de x sur le plus grand entier $\leq x$.

(3) On pourrait prendre une hypothèse encore plus générale mais moins simple.

(4) Nous utilisons la lettre p comme symbole générique d'un nombre premier.

ALGÈBRE. — *Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires*. Note (*) de MM. **Léonce Lesieur** et **Robert Croisot**, présentée par M. Henri Villat.

Nous caractérisons les idéaux tertiaires d'un anneau ou d'un demi-groupe (et les sous-modules tertiaires d'un module) à l'aide de la notion de résiduel essentiel (1). Plus généralement les résiduels essentiels d'un idéal (ou d'un sous-module) X coïncident avec les idéaux (ou les sous-modules) premiers associés à une décomposition de X comme intersection réduite d'idéaux (ou de sous-modules) tertiaires.

Nous utilisons les notations et les résultats de notre précédente Note [1] et nous supposons réalisées les hypothèses du paragraphe 8 de [I] qui imposent notamment à (L) d'être un treillis semi-modulaire vérifiant la condition de chaîne ascendante ou la condition de chaîne descendante affaiblie et qui impliquent que tout élément de (L) est intersection réduite d'éléments tertiaires.

THÉORÈME 1. — *Pour qu'un élément* Q *de* (L) *distinct de* U *soit tertiaire, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel essentiel* [2].

Montrons d'abord que, si Q est $\mathfrak{P}$-tertiaire [3], $\mathfrak{P}$ est son unique résiduel essentiel. Puisque Q est $\mathfrak{P}$-primal, $\mathfrak{P}$ est son résiduel à gauche propre maximum; c'est donc un résiduel essentiel de Q d'après la propriété 1 de (N). Supposons maintenant que $\mathfrak{P}'$ soit résiduel essentiel de Q par rapport à Y. On a $\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{P}$ puisque $\mathfrak{P}$ est résiduel à gauche propre maximum de Q. Considérons l'élément $(Q .\cdot \mathfrak{P}) \cap Y$; Q étant $\mathfrak{P}$-tertiaire, on ne peut avoir $(Q .\cdot \mathfrak{P}) \cap Y = Q$. On a donc

$$Q < (Q .\cdot \mathfrak{P}) \cap Y \leqq Y.$$

Il en résulte, puisque $\mathfrak{P}'$ est essentiel par rapport à Y,

$$\mathfrak{P}' = Q \cdot. [(Q .\cdot \mathfrak{P}) \cap Y], \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{P}' \geqq Q \cdot. (Q .\cdot \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}.$$

Par suite, on a bien $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$ qui est l'unique résiduel essentiel de Q.

Réciproquement, montrons que, si Q admet un seul résiduel essentiel, il est tertiaire. Comme tout résiduel à gauche propre maximal de Q est essentiel d'après la propriété 1 de (N), Q possède un résiduel à gauche propre maximum $\mathfrak{P}$ et par suite il est $\mathfrak{P}$-primal. Tout revient donc à démontrer

$$(Q .\cdot \mathfrak{P}) \cap X = Q \Rightarrow X = Q.$$

Supposons qu'on ait $Q < X$. Considérons un résiduel à gauche propre maximal de Q parmi ceux qui sont de la forme $Q \cdot. Y$ avec $Q < Y \leqq X$. Ce résiduel est essentiel par rapport à Y puisque $Q < Z \leqq Y$ entraîne $Q \cdot. Z \geqq Q \cdot. Y$ avec $Q < Z \leqq X$. Il coïncide donc avec l'unique résiduel essentiel de Q qui est $\mathfrak{P}$ et l'on a $Q \cdot. Y = \mathfrak{P}$. On en déduit $\mathfrak{P} Y \leqq Q$ et $Y \leqq Q .\cdot \mathfrak{P}$. Comme on a aussi $Y \leqq X$, on en tire $Y \leqq (Q .\cdot \mathfrak{P}) \cap X = Q$ ce qui contredit le choix de Y. On a donc $X = Q$ et, par suite, Q est tertiaire.

Pour généraliser le théorème 1, nous utiliserons la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 1. — $\mathfrak{P}$ *étant résiduel essentiel de* X *par rapport à* Y *et* $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ *étant une décomposition réduite de* X *comme intersection d'éléments tertiaires, il existe un* Q_i *et un seul satisfaisant à* $X = Q_i \cap Y$ *et l'on a* $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$, *si* $\mathfrak{P}_i$ *désigne l'élément premier associé à* Q_i.

Considérons, parmi les éléments $Q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, un ensemble minimal, par exemple $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ tel qu'on ait $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_m \cap Y$. De $X < Y$, résulte $m \geqq 1$. Formons $Y' = Q_2 \cap \ldots \cap Q_m \cap Y$. On a $X < Y' \leqq Y$

d'après le choix de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Il en résulte $\mathfrak{P} = X \cdot. Y'$ puisque $\mathfrak{P}$ est résiduel essentiel de X par rapport à Y. Mais on a $X \cdot. Y' = Q_1 \cdot. Y'$ et $Y' \nleq Q_1$ car $Y' \leq Q_1$ entraînerait $Y' \leq X$. On en déduit $Q_1 \cdot. Y' \leq \mathfrak{P}_1$ c'est-à-dire $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{P}_1$. On a d'autre part $(X . \cdot \mathfrak{P}_1) \cap Y' = (Q_1 . \cdot \mathfrak{P}_1) \cap Y' \nleq Q_1$ puisque Q_1 est $\mathfrak{P}_1$-tertiaire et, par suite, $X < (X . \cdot \mathfrak{P}_1) \cap Y' \leq Y$. $\mathfrak{P}$ étant résiduel essentiel de X par rapport à Y, il en résulte $\mathfrak{P} = X \cdot. Y = X \cdot. [(X . \cdot \mathfrak{P}_1) \cap Y'] \geq X \cdot. (X . \cdot \mathfrak{P}_1) \geq \mathfrak{P}_1$. On obtient ainsi $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$. De plus, l'hypothèse $m > 1$ aurait donné de même $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2$ et l'égalité $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$ est impossible. On a donc nécessairement $X = Q_1 \cap Y$ avec, pour la même raison, $Q_2 \cap Q_3 \cap \ldots \cap Q_n \cap Y > X$.

Appliquons cette propriété à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2. — *Les résiduels essentiels de X coïncident avec les éléments premiers associés aux éléments tertiaires d'une décomposition réduite de X comme intersection d'éléments tertiaires.*

Soit $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ une telle décomposition, l'élément Q_i étant $\mathfrak{P}_i$-tertiaire. Un résiduel essentiel $\mathfrak{P}$ de X est nécessairement l'un des éléments $\mathfrak{P}_i$ d'après la propriété 1. Inversement, posons $X' = Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ et considérons les résiduels de X de la forme $X \cdot. Z$ avec $X < Z \leq X'$. Ils admettent un élément maximal au moins qui est de la forme $X \cdot. Y$ avec $X < Y \leq X'$ et qui est résiduel essentiel de X par rapport à Y. Comme on a $Y \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n = Y \cap X' = Y > X$, on a nécessairement, d'après la propriété 1, $X = Q_1 \cap Y$ et $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$. On démontre de même que $\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ sont des résiduels essentiels de X.

Terminons par une propriété supplémentaire des résiduels essentiels.

Propriété 2. — *Soit* $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$. *Tout résiduel essentiel de* X *est résiduel essentiel de l'un des éléments* X_i ([4]).

Il suffit de faire la démonstration pour $n = 2$. Soient $X = X_1 \cap X_2$ et $\mathfrak{P}$ un résiduel pseudo-essentiel de X. D'après la définition 2 de (N), il existe $Y \nleq X$ avec $\mathfrak{P} = X \cdot. X$ et

$$Z \leq Y,\ Z \nleq X \Rightarrow X \cdot. Z = X \cdot. Y.$$

De $\mathfrak{P} = (X_1 \cap X_2) \cdot. Y = (X_1 \cdot. Y) \cap (X_2 \cdot. Y)$ et du fait que $\mathfrak{P}$ est premier d'après la propriété 4 de (N) donc $\cap$-irréductible, résulte $\mathfrak{P} = X_1 \cdot. Y$ par exemple. Si l'on a $Y \leq X_1$, on a aussi

$$\mathfrak{P} = X_2 \cdot. Y,$$

avec $Y \nleq X_2$ car on ne peut avoir simultanément $Y \leq X_1$ et $Y \leq X_2$. On peut donc supposer, par exemple, $\mathfrak{P} = X_1 \cdot. Y$ avec $Y \nleq X_1$. Soit alors $Z_1 \leq Y$ tel qu'on ait $Z_1 \nleq X_1$. On en déduit $Z_1 \nleq X$ d'où $X \cdot. Z_1 = X \cdot. Y = \mathfrak{P}$ et, par suite,

$$\mathfrak{P} = (X_1 \cdot. Z_1) \cap (X_2 \cdot. Z_1).$$

Si, quel que soit le choix de Z_1, $\mathfrak{P}$ est toujours égal à $X_1 \cdot. Z_1$, on a $X_1 \cdot. Z_1 = X_1 \cdot. Y$ et $\mathfrak{P}$ est résiduel pseudo-essentiel de X_1 par rapport à Y. S'il

existe Z_1 pour lequel $\mathfrak{P}$ soit distinct de $X_1 \cdot . Z_1$, $\mathfrak{P}$ est égal à $X_2 \cdot . Z_1$ et l'on a $Z_1 \not\leq X_2$ car $Z_1 \leq X_2$ entraînerait $\mathfrak{P} = X_1 \cdot . Z_1$. Considérons alors un élément Z_2 tel qu'on ait $Z_2 \leq Z_1 (\leq Y)$, $Z_2 \not\leq X_2$. On en déduit $Z_2 \not\leq X$, d'où $X \cdot . Z_2 = X \cdot . Y = \mathfrak{P}$ et, par suite,

$$\mathfrak{P} = (X_1 \cdot . Z_2) \cap (X_2 \cdot . Z_2).$$

Mais la relation $\mathfrak{P} < X_1 \cdot . Z_1$ entraîne la relation $\mathfrak{P} < X_1 \cdot . Z_2$ et l'on doit avoir $\mathfrak{P} = X_2 \cdot . Z_2 = X_2 \cdot . Z_1$ ce qui montre que $\mathfrak{P}$ est résiduel pseudo-essentiel de X_2 par rapport à Z_1.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) *Cf.* L. Lesieur et R. Croisot, *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 357. Cette Note sera désignée ici par (N).

(2) Ce théorème est valable avec les seules hypothèses du paragraphe 1 de [I].

(3) Rappelons que, pour qu'un élément Q soit $\mathfrak{P}$-tertiaire, il faut et il suffit qu'il soit $\mathfrak{P}$-primal et qu'on ait $(Q \cdot . \mathfrak{P}) \cap Y = Q \Rightarrow Y = Q$ ([I], § 7).

(4) En fait, dans le cas général (hypothèses du paragraphe 1 de [I] seulement), cette propriété est valable pour les résiduels pseudo-essentiels [*cf.* la définition 2 de (N)] et elle ne l'est pas nécessairement pour les résiduels essentiels si (L) n'est pas semi-modulaire. Pour s'en assurer, il suffit de prendre l'exemple de la page 185 de L. Lesieur, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 83, 1955, p. 161-193, en posant $X_1 = a$, $X_2 = b$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une extension de la notion de distribution.*

Note de M. **Charles Roumieu**, présentée par M. Jacques Hadamard.

On définit dans cette Note des distributions un peu plus générales que celles de M. L. Schwartz, et qui possèdent des propriétés analogues. Ces distributions généralisées permettent d'obtenir des solutions fondamentales pour des équations de convolution qui n'en ont pas dans l'espace des distributions ordinaires.

1. Soient : $\{M_\nu\}$ une suite donnée : $\nu = 0, 1, 2 \ldots$; $0 < M_\nu \leq +\infty$; $M_0 < +\infty$; $(M_\nu)^2 \leq M_{\nu-1} M_{\nu+1}$; $\sum_{\nu=0}^{\infty} (M_\nu)^{-1/\nu} < +\infty$.

$\mathcal{D}(\{M_\nu\}, I, k)$ l'espace vectoriel des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur la droite, nulles en dehors du segment I, et telles que

$$|f^{(\nu)}(t)| \leq A k^\nu M_\nu; \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

A est une constante pouvant dépendre de f. Cet espace est muni de la topologie définie par la norme

$$\|f\|_{M_\nu, k} = \sup_{\nu \geq 0} \left| \frac{1}{k^\nu M_\nu} \sup_t |f^{(\nu)}(t)| \right|. \tag{2}$$

$\mathcal{D}(\{M_\nu\})$ désigne la réunion des $\mathcal{D}(\{M_\nu\}, I, k)$ lorsque I et k varient. La topologie de $\mathcal{D}(\{M_\nu\})$ est la limite inductive des topologies des $\mathcal{D}(\{M_\nu\}, I, k)$. On démontre les propositions suivantes :

PROPOSITION 1. — *Pour qu'un ensemble soit borné dans $\mathcal{D}(\{M_\nu\},)$, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un $\mathcal{D}(\{M_\nu\}, I, k)$, et y soit borné.*

PROPOSITION 2. — *Il y a identité, dans $\mathcal{D}(\{M_\nu\})$, entre formes linéaires bornées et formes linéaires continues.*

2. On désigne par $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ le dual topologique de $\mathcal{D}(\{M_\nu\})$, muni de la topologie forte; par $\mathcal{G}'$ la réunion des $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$. Les distributions généralisées, S, sont les éléments de $\mathcal{G}'$. On dit que des S_j convergent vers zéro, si elles sont contenues dans un $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ et y convergent vers zéro.

$\mathcal{D}(\{M_\nu\})$ contient des fonctions de support arbitrairement petit; cela permet de définir le support de S, comme pour une distribution ordinaire.

Lorsque $M_\nu < +\infty$, $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ contient $\mathcal{D}'$; lorsque $M_\nu = +\infty$ pour $\nu > p$, $(p \geqq 0)$, $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ est l'espace des distributions d'ordre $\leqq p$.

On désigne par $\mathcal{E}(\{M_\nu\})$ l'espace des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur la droite, vérifiant, sur chaque segment I, des inégalités telles que (1), A et k pouvant dépendre de f et de I, muni d'une topologie convenable. Le dual topologique $\mathcal{E}'(\{M_\nu\})$ de cet espace est le sous-espace de $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ formé des distributions généralisées de support borné.

On définit, comme pour les distributions ordinaires :

la dérivée S' de S; si $S \in \mathcal{D}'(\{M_\nu\})$, alors, $S' \in \mathcal{D}'(\{M_{\nu-1}\})$;

le produit multiplicatif Sf; $S \in \mathcal{D}'(\{M_\nu\})$, $f \in \mathcal{E}(\{M_\nu\})$; alors, $Sf \in \mathcal{D}'(\{M_\nu\})$;

le produit de convolution $S\star T$; $S \in \mathcal{D}'(\{M_\nu\})$, $T \in \mathcal{E}'(\{N_\nu\})$; alors,

$$S\star T \in \mathcal{D}'(\{R_\nu\}),$$

si l'on a

$$R_{\lambda+\nu} \leqq H\alpha^\lambda\beta^\nu M_\lambda N_\nu \qquad (H,\ \alpha,\ \beta,\ \text{constantes}); \tag{3}$$

la régularisation : Les suites $\{M_\nu\}$, $\{N_\nu\}$, $\{R_\nu\}$ vérifiant toujours (3), on a $S\star f \in \mathcal{E}(\{N_\nu\})$ si $S \in \mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ et $f \in \mathcal{D}(\{R_\nu\})$.

Ces opérations sont linéaires et hypo-continues.

PROPOSITION 3. — $\mathcal{D}(\{M_\nu\})$ *muni de la topologie induite par* $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ *est dense dans* $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$.

PROPOSITION 4. — *Toute distribution généralisée à support borné* $S \in \mathcal{E}'(\{M_\nu\})$ *est égale à une série convergente dans* $\mathcal{E}'(\{M_\nu\})$ *de la forme*

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} D^\nu \mu_\nu,$$

où les μ_ν sont des mesures de supports contenus dans un voisinage arbitraire du support de S, et telles que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k^\nu M_\nu \|\mu_\nu\| < +\infty \qquad \text{quel que soit } k.$$

La proposition 4 se démontre en utilisant le théorème de Hahn-Banach.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les dérivées partielles mixtes.* Note de M. **Solomon Marcus**, présentée par M. Paul Montel.

Par des méthodes de la théorie descriptive des fonctions et en utilisant un théorème de S. Kempisty, on établit un critère global de commutativité des dérivées partielles mixtes.

Considérons une fonction réelle, finie, f, définie dans un domaine $D \subset R^n$ et douée de dérivées partielles jusqu'à un certain ordre p. Désignons par x, y ou z des points de R^n. Convenons de dire qu'une dérivée partielle mixte est *commutative* en x, si sa valeur en x est indépendante de l'ordre des dérivations. Si une dérivée partielle mixte est commutative en chaque point x d'un ensemble E, elle est commutative dans E.

La fonction f est *partiellement continue* en x si f est continue en x, par rapport à chaque variable prise à part. Si f est partiellement continue en chaque point $x \in E$, f est partiellement continue dans E.

On dit, d'après S. Kempisty, que la fonction f est *quasi continue* en x, si pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque sphère ouverte S, contenant x, il existe une sphère $S_1 \subset S$, telle que $y \in S_1$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si f est quasi-continue en chaque point $x \in E$, f est quasi continue dans E [1]. Dans la suite on utilise le théorème suivant dû à S. Kempisty : toute fonction réelle, finie, f, définie et partiellement continue dans un domaine $D \subset R^n$, est quasi continue dans D [1].

Lemme 1. — *Une fonction quasi continue dans* D *est ponctuellement discontinue dans* D.

Démonstration. — Considérons une sphère ouverte $S \subset D$. Soit $x \in S$. En utilisant la quasi-continuité de f en x, on trouve, pour $\varepsilon > 0$, une sphère $S_1 \subset S$, telle que $y \in S_1$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. On a donc, pour $y \in S_1$, $z \in S_1$, $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ d'où l'on déduit que l'oscillation de f dans S_1 est $\leq \varepsilon$. Ce fait entraîne que les points de D où l'oscillation de f est supérieure à ε, forment un ensemble rare, donc que les points de discontinuité de f forment un ensemble de première catégorie.

Lemme 2. — *Si deux fonctions réelles finies f et g, sont définies et partiellement continues dans* D *et s'il existe un ensemble* E, *partout dense dans* D, *tel que $f(x) = g(x)$ pour chaque $x \in E$, alors $f(x) = g(x)$ pour chaque $x \in D$.*

Démonstration. — Supposons, qu'il existe $x \in D$, tel que $\varphi(x) = f(x) - g(x) \neq 0$. D'après le théorème de S. Kempisty, la fonction $\varphi = f - g$ (qui est partiellement continue dans D) est quasi continue dans D, donc quasi continue en x. Soit $0 < \varepsilon < |\varphi(x)|$. Il existe une sphère $S \subset D$, telle que $z \in S$ entraîne $|\varphi(x) - \varphi(z)| < \varepsilon$. Mais, E étant partout dense dans D, il existe un point $y \in S \cap E$, donc $\varphi(y) = 0$. On en déduit que $|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$, ce qui est contradictoire.

THÉORÈME. — *Soit f une fonction réelle, finie, définie dans un domaine* $D \subset R^n$. *Soit p un entier positif. Si les dérivées partielles mixtes, d'ordre p, de la fonction f, existent et sont partiellement continues dans* D, *alors chaque dérivée partielle mixte, d'ordre* $\leq p$, *est commutative dans* D.

Démonstration. — Chaque dérivée partielle mixte d'ordre $\leq p$ est une fonction partiellement continue dans D. D'après le théorème de S. Kempisty, cette fonction est quasi continue dans D et, en vertu du lemme 1, ponctuellement discontinue dans D. Il existe donc un ensemble $B \subset D$, de première catégorie, tel que chaque dérivée partielle mixte d'ordre $\leq p$ est continue dans $D - B$. D'après le théorème classique de Schwarz, il s'ensuit que chaque dérivée partielle mixte, d'ordre $\leq p$, est commutative dans $D - B$. Puisque $D - B$ est partout dense dans D et puisque chaque dérivée partielle mixte d'ordre $\leq p$ est partiellement continue dans D, il s'ensuit, en vertu du lemme 2, que chaque dérivée partielle mixte d'ordre $\leq p$ est commutative dans D.

COROLLAIRE 1. — *Si f admet, dans* $D \subset R^n$, *toutes les dérivées partielles mixtes (finies) d'ordre p, alors chaque dérivée partielle mixte, d'ordre* $< p$, *est commutative dans* D.

COROLLAIRE 2. — *Si la fonction réelle, finie, f, définie dans un domaine* $D \subset R^n$, *admet dans* D, *pour chaque entier positif p, toutes les dérivées partielles possibles, d'ordre p, alors chaque dérivée partielle mixte de f est commutative dans* D.

Remarque 1. — Le fait, utilisé dans la démonstration du théorème ci-dessus, qu'une fonction partiellement continue dans D est ponctuellement discontinue dans D, a été établi pour la première fois, pour les fonctions de $n > 2$ variables, par H. Hahn [2]. D'ailleurs, les dérivées partielles d'une fonction partiellement dérivable sont toujours ponctuellement discontinues, comme l'a montré René Baire dans sa thèse. Nous avons préféré utiliser une démonstration qui repose sur le théorème de S. Kempisty, puisque ce théorème fournit la voie la plus courte pour obtenir le lemme 2 et, donc, était, en tout cas, nécessaire dans la démonstration du théorème.

Remarque 2. — G. P. Tolstov [3], a montré qu'il existe une fonction de deux variables, admettant des dérivées partielles de toute sorte et de tout ordre dans un domaine $D \subset R^2$, et qui est discontinue en chaque point d'un ensemble de mesure positive de D. Ce fait précise le caractère non banal du théorème établi.

Remarque 3. — Si les dérivées partielles mixtes, d'ordre $\leq p$, de f sont bornées dans D, alors, pour les fonctions de deux variables, avec $p = 2$, le théorème établi est une conséquence d'un travail de J. Geffroy [4].

Remarque 4. — Pour les fonctions de deux variables et en exigeant l'existence de *toutes* les dérivées partielles d'ordre p (et non seulement de celles mixtes), la commutativité des dérivées partielles mixtes, d'ordre $< p$, a été établie par, G. P. Tolstov, par une voie laborieuse, qui utilise l'intégrale de Lebesgue et celle de Denjoy [3].

Remarque 5. — I. Barbalat ([5]) a montré que la commutativité des dérivées partielles mixtes, d'ordre 2, et la fonction $F(x, y) = y^2[\log(x^2+y^2) - \log y^2]$ si $y \neq 0$, $F(x, y) = 0$ si $y = 0$, ne peut être établie à l'aide du critère de Young ou celui de Schwarz et il est aisé de voir qu'elle ne peut être établie avec le critère de A. Ostrowski ([6]). Le théorème établi dans la présente Note s'applique à la fonction en cause, car ses dérivées partielles mixtes, d'ordre 2, sont partiellement continues dans R^2.

([1]) *Fund. Math.*, **19**, 1932, p. 184-197.
([2]) *Math. Z.*, **4**, 1919, p. 306-313.
([3]) *Izvestia Akad. Nauk.*, **13**, 5, 1949, p. 425-446.
([4]) *Bull. cl. Soc. Acad. roy. Belg.*, **42**, 1956, p. 533-542.
([5]) *Gazeta Mat. Fiz, Bucarest*, **1**, 1949, p. 48-50.
([6]) *Comment. Math. Helv.*, **15**, 1942-1943, p. 222-226.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une généralisation du théorème de Weierstrass-Stone*. Note de M. **Ion Zamfirescu**, présentée par M. Paul Montel.

Dans cette Note, nous donnons une généralisation du théorème de Weierstrass-Stone pour des fonctions prenant leurs valeurs dans un espace localement convexe, et pour des fonctions multiformes.

1. Soit R un espace topologique et soit V un espace vectoriel topologique localement convexe. Désignons par R(V) l'ensemble des applications continues sur R, prenant ses valeurs dans V. R(V) est un espace vectoriel. Soit K, un sous-ensemble de R. Nous définissons, comme d'habitude, la convergence uniforme d'une suite $\underset{x \in K}{f_n(x)} \in R(V)$ vers une application $\underset{x \in K}{f(x)} \in R(V)$ et R(V) devient ainsi un espace topologique $R_K(V)$. Soit U(V) un sous-ensemble de R(V). Nous désignons par $\overline{U}_K(V)$ la fermeture de U(V) dans $R_K(V)$.

2. Soit, maintenant L(V), l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies et continues sur V. A l'aide de la convergence uniforme, L(V) devient un espace topologique. Soit M, un sous-ensemble de L(V). Nous désignons par S(M) l'enveloppe linéaire minimum de M. Nous convenons de dire que M est une *base approximative* dans L(V), si 1°, M est formé de fonctionnelles linéairement indépendantes; 2°, $\overline{S(M)} = L(V)$.

Dans ces conditions, on peut énoncer le

Théorème I. — *Si, pour un sous-ensemble* U(V) *de* R(V) *on a les conditions :*

1° U(V) *est un sous-espace de* R(V);

2° U(V) *sépare les points de* R [*pour* $t' \neq t''$, $t' \in R$, $t'' \in R$], *il existe* $f \in U(V)$ *telle que* $f(t') \neq f(t'')$;

3° *Pour toutes* f, $g \in \mathrm{U}(\mathrm{V})$, *il existe* $h \in \mathrm{U}(\mathrm{V})$, *telle que* $\Gamma(f).\ \Gamma(g) = \Gamma(h)$, *quel que soit* $\Gamma \in \mathrm{M}$ [*où* M *est une base approximative dans* L(V)];

4° U(V) *contient les constantes; alors* $\overline{\mathrm{U}}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V}) = \mathrm{R}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$ *pour tout ensemble compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{R}$.

3. *Applications.* — On peut montrer que l'ensemble des polynomes définis et continus sur un espace vectoriel topologique R, ou sur un groupe topologique et dont les valeurs sont dans un espace vectoriel topologique localement convexe V, jouit des propriétés 1°, 2°, 3° et 4° de l'ensemble U(V) du théorème I. Donc : toute fonction continue $f : \mathrm{R} \to \mathrm{V}$ peut admettre sur tout compact une approximation uniforme par des polynomes.

4. Désignons par $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$ l'ensemble des applications multiformes continues de R dans V. Posons $f'(x) \leqq f''(x)$ si et seulement si $f'(x) \subseteq f''(x)$ pour tout $x \in \mathrm{R}$. On a défini ainsi un ordre partiel dans $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$. Soient A et B, deux parties de V. Désignons par A + B l'ensemble des éléments de la forme $a + b$, où $a \in \mathrm{A}$ et $b \in \mathrm{B}$. λ étant un scalaire, désignons par $\lambda\mathrm{A}$ l'ensemble des éléments de la forme λa, où $a \in \mathrm{A}$. Pour f', $f'' \in \mathrm{R}^0(\mathrm{V})$, nous posons $f = f' + f''$ si pour tout $x \in \mathrm{R}$ on a $f(x) = f'(x) + f''(x)$. On a $f(x) \in \mathrm{R}^0(\mathrm{V})$. D'une manière analogue on définit $f = \lambda f'$. Convenons de dire que l'ensemble $\mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ est un *pseudo-sous-espace vectoriel* de $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$ si : 1° $\mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ est un sous-ensemble de $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$; 2° pour tout f, $g \in \mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ il existe $h \in \mathrm{U}^0(\mathrm{V})$, tel que $f + g \leqq h$; 3° pour $f \in \mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ et λ scalaire, il existe $h^0 \in \mathrm{U}^0(\mathrm{V})$, tel que $\lambda f \leqq h$.

5. Soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments de $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$. Convenons de dire que la suite $\{f_n(x)\}$ converge *uniformément ponctuellement* vers $f(x)$, si pour chaque W(o) il y a N(W(o)), tel qu'il existe $b_n \in \mathrm{W}(a)$, quels que soient $n \geqq \mathrm{N}$ et $x \in \mathrm{R}$. [On a désigné par b_n un point de $f_n(x)$ et par a un point de $f(x)$, où $f_n(x)$, $f(x) \in \mathrm{R}^0(\mathrm{V})$ et $\mathrm{W}(a) = \mathrm{W}(o) + a$]. D'une manière analogue, on peut définir la *convergence uniforme ponctuelle sur un ensemble* $\mathrm{K} \subset \mathrm{R}$. A l'aide de cette convergence, $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$ devient un espace topologique $\mathrm{R}^0_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$.

On peut maintenant énoncer :

Théorème II. — *Soit* $\mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ *une partie de* $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$. *Supposons que* :

1° $\mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ *est un pseudo sous-espace de* $\mathrm{R}^0(\mathrm{V})$;

2° $\mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ *sépare les points de* R;

3° *Pour tout* f, $g \in \mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ *il existe* $h \in \mathrm{U}^0(\mathrm{V})$, *telle que* $\Gamma(f)\Gamma(g) \leqq \Gamma(h)$ *quel que soit* $\Gamma \in \mathrm{M}$ (*où* M *est une base approximative dans* L(V);

4° $\mathrm{U}^0(\mathrm{V})$ *contient les constantes; alors* $\mathrm{U}^0_{\mathrm{K}}(\mathrm{V}) = \mathrm{R}^0_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$ *pour chaque compact* $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{R}$..

Les démonstrations de ces théorèmes seront données dans une autre publication.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *La théorie spectrale des opérateurs aux dérivées partielles du type elliptique.* Note de M. **Félix Browder**, présentée par M. Jean Leray.

Nous étudions la théorie spectrale de l'opérateur maximal d'un opérateur différentiel elliptique linéaire A sur un espace euclidien et obtenons des résultats précis sur la position du spectre et du spectre continu. Plus généralement, nous obtenons un résultat semblable pour un domaine régulier G non borné en imposant les conditions de Dirichlet nulles en chaque point du bord de G.

1. Soit $A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \left[D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n};\ |\alpha| = \sum_j \alpha_j \right]$, un opérateur différentiel défini dans l'espace réel E^n à n dimensions. A est uniformément elliptique sur E^n s'il existe une constante $p_0 > 0$ telle que

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geq p_0 \sum_{|\alpha| = m} |\xi^\alpha|^2$$

pour chaque x dans E^n et chaque n-vecteur réel $\xi [\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}]$.

Soit $C_c^\infty(E^n)$ la famille des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans E^n; $W^{j,p}(E^n)$, si j est un nombre entier, $p \geq 1$, est l'espace normé de distributions u avec $D^\alpha u \in L^p(E^n)$, $|\alpha| \leq j$, et la norme

$$\| u \|_{j,p}^2 = \sum_{|\alpha| \leq j} \| D^\alpha u \|_{L^p(E^n)}^2.$$

L'opérateur $A' = \sum c_\alpha(x) D^{\alpha_1}$ est l'adjoint de A si $(Au, v) = (u, A'v)$ pour tout u, v dans $C_c^\infty(E^n)$ (1). A est symétrique si $A' = A$.

Si $q(x)$ est une fonction réelle et continue sur E^n, nous considérons l'opérateur minimal A_q associé à $A + q$ dans $L^2(E^n)$, c'est-à-dire A_q est la fermeture dans $L^2(E^n)$ de l'opérateur $A + q$ considéré sur le domaine $C_c^\infty(E^n)$. L'opérateur maximal de $A + q$ dans $L^2(E^n)$ est $(A'_q)^\star$, où A'_q désigne l'opérateur minimal de $A' + q$.

Théorème 1. — *Soit* A *un opérateur uniformément elliptique sur* E^n, *ayant l'adjoint* A'. *On suppose que* $|a_\alpha|$ *et* $|c_\alpha|$ *sont bornés uniformément sur* E^n *pour chaque* α, *que* a_α *est continu uniformément sur* E^n *pour* $|\alpha| = 2m$ *et que* $(-1)^m q(x) \geq c$ *dans* E^n; c *est une constante. Soit* A_q *l'opérateur minimal de* $A' + q$, A'_q, *l'opérateur minimal de* $A' + q$. *Alors :*

(*a*). $(A'_q)^\star = A_q$; *Si* A *est symétrique,* A_q *est hermitien* (2).

(*b*). *Étant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $k(\varepsilon)$ *telle qu'on a, pour* u *dans le domaine de* A_q,

$$(-1)^m \operatorname{Re}(A_q u, u) \geq (p_0 - \varepsilon) \| u \|_{m,2}^2 - k(\varepsilon) \| u \|_{L^2(E^n)}^2 \quad (3).$$

(*c*). *Il existe des constantes* $c \geq 0$, k_0, *telles que le spectre de* $(-1)^m A_q$ *est contenu dans l'ensemble* $\{\zeta \mid |\operatorname{Im}\zeta| \leq c(\operatorname{Re}\zeta + k_0)^{2m-1/2m}\}$ (4).

(*d*). *Si* q *est borné uniformément sur* E^n, *le domaine de* A_q *est* $W^{2m,2}(E^n)$. *Dans ce cas, il existe pour chaque* $p \geq 2$, *une constante* h_p, *telle que si* $f \in L^2(E^n) \cap L^p(E^n)$ *et* $A_q u = f$, *alors* u *est un élément de* $W^{2m,p}(E^n)$ *et*

$$\| u \|_{2m,p} \leq h_p \{ \| u \|_{L^2} + \| f \|_{L^p} \} \quad (5).$$

a. Si pour tout α, $c_\alpha(x) - a_\alpha(x) \to 0$ *quand* $|x| \to \infty$, *alors hors du segment de l'axe réel,* $(-1)^m \xi \geq -k_0$, *tout point du spectre de* A_q *est isolé et de multiplicité finie* (6).

2. On suppose maintenant que A est défini sur l'ensemble ouvert G de E^n. G est appelé régulier s'il existe une constante $r > 0$ et des suites d'ensembles ouverts $\{U_j\}$ de E^n et d'applications topologiques $\{\Phi_j\}$ de U_j sur la boule $B = \{|x| < 1\}$ de E^n, tels que :

1° Au plus r des ensembles U_j ont une intersection non vide;

2° $\bigcup_j U_j$ contient le $(1/r)$-voisinage du bord B(G) de G;

3° Φ_j applique $U_j \cap G$ sur $\{x \mid x_n > 0\} \cap B$ et $U_j \cap B(G)$ sur $\{x \mid x_n = 0\} \cap B$;

4° Si $\Phi_{j,k}$ est la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de Φ_j, $|D^\alpha \Phi_{j,k}(x)| \leq r$, $|D^\alpha (\Phi_j)_k^{-1}(x)| \leq r$, $\alpha| \leq 2m$.

Soit N(G) la famille des fonctions de $C^{2m}(G)$, ayant des supports bornés dans G, qui satisfont les conditions de Dirichlet nulles d'ordre m sur le bord de G. Soit A' l'adjoint de A; soit $q(x)$ une fonction réelle et continue sur $\overline{G}$. On considère $A + q$ et $A' + q$ comme des opérateurs de $L^2(G)$ avec le domaine N(G); soient $A_{q,G}$ et $A'_{q,G}$ leurs fermetures respectives dans $L^2(G)$.

Théorème 2. — *On suppose que* G *est régulier* (7), *que* $|a_\alpha|$ *et* $|c_\alpha|$ *sont bornés uniformément sur* G *pour tout* α, *et que* a_α *est continu uniformément sur* G *pour* $|\alpha| = 2m$, $(-1)^m q(x) \geq c$. *Alors les conclusions du théorème* 1 *restent vraies si l'on remplace* E^n *par* G, A_q *par* $A_{q,G}$, *et* A'_q *par* $A'_{q,G}$ *respectivement* (3), (4), (5), (6), (7) (8).

(1) (u, v) est le produit scalaire de $L^2(E^n)$; A^* est l'adjoint de A dans $L^2(E^m)$.

(2) Si $A = \Delta$, l'opérateur de Laplace, la deuxième partie de (*a*) est un théorème classique de Carleman (*Ark. f. Mat.*, 24 B, n° 11, 1934) et Friedrichs (*Math. Ann.*, 109, 1934, p. 685-713).

(3) Pour les domaines bornés, l'inégalité de (*b*) fut annoncée d'abord par Gårding (*Comptes rendus*, 233, 1951, p. 1554).

(4) Pour les domaines bornés, (*c*) est un résultat de l'auteur (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, 39, 1953, p. 185-190).

(5) Pour les domaines bornés, $p = 2$, (*d*) a été obtenu indépendamment par Guseva (*Dokladi*, 102, 1955, p. 1069-1072); Nirenberg (*Comm. Pure App. Math.*, 8, 1955, p. 648-674) et l'auteur (*Comm. Pure App. Math.*, 9, 1956, p. 351-361) et si $m = 1$, p arbitraire, par Koshelev (*Mat. Sbornik*, 38, 1956, p. 359-372).

(6) Pour $\Lambda = \Delta + q_1$ (q_1 complexe), (e) était établi par Lidski (*Dokladi*, 112, 1957, p. 994-997).

(7) La condition de régularité sur G n'est pas nécessaire pour (a), (b) et (c), si l'on définit les conditions de Dirichlet en chaque point de B(G) dans le sens variationnel.

(8) Dans (d) le domaine de $A_{q,G}$ est constitué par les fonctions de $W^{2m,2}(G)$ qui satisfont les conditions de Drichlet nulles d'ordre m au sens variationnel.

GÉOMÉTRIE. — *Remarques sur les polytopes saturés.*

Note (*) de M. **Matthias Matschinski**, présentée par M. Georges Darmois.

1. Correspondance entre les polytopes saturés ($P_{N,\varkappa}$) et les formes (L, $M_L \ldots M_1$) étudiés précédemment (2). 2. Nombres limites des éléments des $P_{N,\varkappa}$ et des formes mentionnées. 3. Équations énumératives des polytopes et leurs résolutions pour les $P_{N,\varkappa}$. Formules déterminant tous les nombres limites des éléments en fonction des nombres limites des liaisons linéaires ($k_{N,\varkappa}$). Démonstrations de l'expression pour $k_{N,\varkappa}$.

1. Reprenons les notations de Notes (1), (2), (3), (4), où nous avons considéré la notion d'une combinaison $(\overline{P}_{N,\varkappa})$ de N points et de liaisons entre ceux-ci (ligne, surface, volume, supervolume, etc.) dans l'espace à $\varkappa - 1$ dimensions, qui est la notion la plus générale, dans le sens non statistique (1). Elle n'est restreinte par aucune condition de « régularité », de « fermeture », etc. Un $\overline{P}_{N,\varkappa}$ peut être constitué aussi bien d'un seul que d'une chaîne de polytopes « fermés », chaîne continue ou non : même des points isolés peuvent constituer — comme un cas limite — un $\overline{P}_{N,\varkappa}$. L'ensemble de tous les $\overline{P}_{N,\varkappa}$ a pour sous-ensembles des ensembles de $P_{N,\varkappa}$ et de (L, $M_L \ldots M_1$). Les *polytopes saturés* ($P_{N,\varkappa}$) sont soumis aux conditions : α. de l'impossibilité de liaisons nouvelles dans l'espace donné (à $\varkappa - 1$ dimensions), et β. de leur conservation en tant que *polytopes* (les liaisons qui les départagent en deux ou en plus de parties sont défendues). Les α et β impliquent la « fermeture ». Les (L, $M_L \ldots M_1$) sont (2) aussi « fermés » cependant on n'exige pas α; pour unifier les symboles, notons un (L, $M_L \ldots M_1$) — dans le cas où l'on peut faire abstraction de sa structure interne — par $(L, \varkappa - 1)_N$. Le rapport entre $P_{N,\varkappa}$ et $(L, \varkappa - 1)_N$ peut être brièvement décrit comme suit. Une $(L, \varkappa - 1)_N$-forme ($\varkappa \neq L + 1$) n'est jamais un $P_{N,\varkappa}$; par définition, il aura toujours place dans $\varkappa - 1$ dimensions pour des liaisons inintroduisibles dans L dimensions. Par contre, l'ensemble des $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)_N$ se trouve dans $P_{N,\varkappa}$. De plus, entre $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)_N$ et $P_{N,\varkappa}$ il y a une *correspondance* : une projection d'un $P_{N,\varkappa}$ dans un espace à $\varkappa - 2$ dimensions (*première* projection) est toujours une première projection d'une $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)_N$. [La réciproque n'est exacte que dans les cas où $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)_N$ est aussi saturée]. Ou, ce qui revient au même : *un* $P_{N,\varkappa}$, *abstraction faite des éléments* (3) $S_{\varkappa-1}$ *à* $\varkappa - 1$ *dimensions, est une* $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)_N$. En effet, un $P_{N,\varkappa}$ peut contenir des éléments qui sont, eux aussi, de $(\varkappa - 1)$ dimensions, tandis qu'une forme $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)_N$ ne contient qu'elle même comme seul élément

(banal) à $(\varkappa - 1)$ dimensions. Ainsi pour faire coïncider un $P_{N,\varkappa}$ à une $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)_N$, on doit : soit faire abstraction des $S_{\varkappa-1}$, soit les éliminer en fait en considérant au lieu de ces deux formes leurs projections. Notons ces projections communes (complétées par un $S_{\varkappa-2}$) par $Q_{N,\varkappa}$.

2. Les nombres N et $\varkappa$ étant fixés, le nombre des éléments d'un $P_{N,\varkappa}$ ne varie que dans les limites assez restreintes (A) : $k_{N,\varkappa} \leqq K'_{N,\varkappa} \leqq k'_{N,\varkappa}$, (B) : $e_{\lambda,N,\varkappa} \leqq E'_{\lambda,N,\varkappa,1} \leqq e'_{\lambda,N,\varkappa}$ où les $E_{\lambda,N,\varkappa,1}$ sont les nombres (non limites) des éléments d'un $P_{N,\varkappa}$ donné, les $e_{\lambda,N,\varkappa}$ et $e'_{\lambda,N,\varkappa}$, les nombres limites (limite inférieure et limite supérieure) des $E_{\lambda,N,\varkappa,1}$, enfin λ, le nombre des points liés par l'élément ($\lambda = 2$ pour les S_1, $\lambda = 3$ pour les S_2, etc.). Les limites inférieures dans (A) et (B) sont de loin les plus importantes. Leurs valeurs, données dans un tableau ([4]), sont les nombres limites *exacts*, sauf ceux qui occupent la grande diagonale et qui sont suivis par le signe de l'inégalité. Faisant l'abstraction des éléments $S_{\varkappa-1}$, on ne change évidemment pas les nombres : $e_{\lambda,N,\varkappa}$, $E'_{\lambda,N,\varkappa,1}$, $e'_{\lambda,N,\varkappa}$, etc., sauf ceux qui correspondent à $S_{\varkappa-1}$ et $S_{\varkappa-2}$. Le nombre des $S_{\varkappa-1}(e_{\varkappa,N,\varkappa})$ devient égal à zéro, le nombre des $S_{\varkappa-2}$, c'est-à-dire $e_{\varkappa-1,N,\varkappa}$, sera diminué de $N - \varkappa + 1$ [*voir* le tableau ([4])]. Ainsi, en introduisant les symboles $\bar{e}_{\lambda,N,\varkappa}$, $E_{\lambda,N,\varkappa,1}$, $\bar{e}'_{\lambda,N,\varkappa}$, $\bar{k}_{N,\varkappa}$, etc., pour les nombres (limites, inférieurs, donnés et limites supérieurs) des éléments dans $Q_{N,\varkappa}$, on obtient pour $\bar{e}_{\lambda,N,\varkappa}$ (et pour $\bar{k}_{N,\varkappa} = \bar{e}_{2,N,\varkappa}$) le même tableau que celui de la Note ([4]) avec deux changements seulement : la grande diagonale sera remplacée par des zéros, et la diagonale suivante par 0, N, $2N - 4$, $3N - 10$, $4N - 18$, etc. Les inégalités (A) et (B) prendront la forme : pour les polyèdres $Q_{N,4} = (3, 3, 2, 1)$: $3N - 6 = \bar{k}_{N,4} \leqq K_{N,4} \leqq \bar{k}'_{N,4}$; $2N - 4 = \bar{e}_{3,N,4} \leqq E_{3,N,4} \leqq \bar{e}'_{3,N,4}$ (ici : $\bar{e}_{3,N,4} = \bar{e}'_{3,N,4}$), pour les $Q_{N,5} = (4, 4, 3, 2, 1)$: $4N - 10 = \bar{k}_{N,5} \leqq K_{N,5} \leqq \bar{k}'_{N,5}$; $6N - 20 = \bar{e}_{3,N,5} \leqq E_{3,N,5} \leqq \bar{e}'_{3,N,5}$, $3N - 10 = \bar{e}_{4,N,5} \leqq E_{4,N,5} \leqq \bar{e}'_{4,N,5}$, etc. Naturellement *tout ceci suppose que la première projection de la* $Q_{N,\varkappa}$ *est saturée.*

3. Les nombres des éléments d'un Q sont déterminés par plusieurs relations : il y en a de deux sortes. D'abord ce sont des relations géométriques, non énumératives; la plus importante entre elles est la formule d'Euler, simple (pour les polyèdres) ou généralisée [*voir* ([1]), ([2])]. [Elle seule sera utilisée; on a le droit de le faire parce qu'on se borne ici aux $(L, \varkappa - 1)_N$, pour lesquelles $\varkappa = L + 1$, *voir* ([2])]. De plus, on a des relations non géométriques, *relations énumératives*. Utilisant les symboles habituels ([1]), on a pour les polyèdres (3, 3, 2, 1) : $e\mu = 2k$, $2k = nf$, pour les polytopes (4, 4, 3, 2, 1) : $E = 2K$, $\lambda K = nF$, $2F = fM$, pour les polytopes (5, 5, 4, 3, 2, 1) : $\lambda_1 Э = 2Ж$, $p_1 Ж = n\Phi$, $q\Phi = fW$, $2W = MV$, etc. En général, on a

$$E_{1,N,\varkappa,1}\, E_{\lambda,N,\varkappa-1,2} = E_{1+\lambda,N,\varkappa,1} E_{1,N,\lambda+1,1} \quad (1 \leqq \lambda \leqq \varkappa - 2);$$

$$E_{2,N,\varkappa,1}\, E_{\lambda,N,\varkappa-2,3} = E_{1+\lambda,N,\varkappa,1}\, E_{2,N,\lambda+2,1} \quad (1 \leqq \lambda \leqq \varkappa - 3); \text{ etc.}$$

Ici sont : $E_{\lambda,N,\varkappa,1}$, les nombres capitaux du polytope (nombres de ses éléments), $E_{\lambda,N,\varkappa-1,1}$, les mêmes nombres pour les sous-polytopes, $E_{\lambda,N,\varkappa-1,2}$, les mêmes

nombres pour l'« étoile » (polytope constitutif autour d'un sommet), $E_{\lambda,N,\varkappa-2,1}$, $E_{\lambda,N,\varkappa-2,2}$ $E_{\lambda,N,\varkappa-2,3}$, les nombres des éléments pour les sous-sous-polytopes et pour les « sous-étoiles », etc. Ainsi pour un polyèdre $E_{1,N,4,1}$, $E_{2,N,4,1}$ et $E_{3,N,4,1}$, sont les e, k, f, [nombres des sommets, des arêtes et des faces, le nombre des éléments est n pour les « sous-polyèdres » (polygones) et μ pour l'étoile]. Pour une (4, 4, 3, 2, 1)-forme $E_{1,N,5,1}=E$, $E_{2,N,5,1}=K$, $E_{3,N,5,1}=F$, $E_{4,N,5,1}=M$ sont les nombres des sommes, des arêtes, des faces et des « corps », e, k, f, ceux des « sous-polytopes » (polyèdres), n et μ, des « sous-polytopes » du degré suivant μ_1, μ_2, μ_3, nombres caractérisant l'étoile constitutive et μ et λ, nombres caractérisant les « sous-étoiles ». Analogiquement pour (5, 5, 4, 3, 2, 1) et ainsi de suite. Les « sous-polytopes » d'une $Q_{N,\varkappa}$ saturée sont nécessairement des simplex. Pour de telles $Q_{N,\varkappa}$ aux formules énumératives mentionnées on doit ajouter : pour un polyèdre : $n=3$, pour une (4, 4, 3, 2, 1)-forme : $e=f=4$, $k=6$, $n=\mu=3$, pour une (5, 5, 4, 3, 2, 1)-forme : $E=M=5$, $K=F=10$; $e=f=\mu_1=\mu_3=4$, $k=\mu_2=6$, $n=\mu=\lambda=3$, pour une (6, 6, 5, 4, 3, 2, 1)-forme : $n=\mu=\lambda=q=3$, etc. La résolution des équations énumératives conjointement avec la formule d'Euler et les conditions de saturation que nous venons d'écrire donne : pour les polyèdres $f=2[K(N)-2N+4]$, pour les (4, 4, 3, 2, 1)-formes : $M=K(N)-N$, $F=2[K(N)-N]$, pour les (5,5, 4, 3, 2, 1)-formes : $V=2[K(N)-3N+6]$, $W=5[K(N)-3N+6]$; $\Phi=4K(N)-10N+20$, et ainsi de suite pour les (6, 6, 5, 4, 3, 2, 1)-formes, etc. En général pour les $(L, M_L, \ldots, M_1)$-formes, où M_L est impaire, on a : $e_{\varkappa-1,N,\varkappa}=2[k(N)-(\varkappa/2)N+\varkappa]$, $e_{\varkappa-2,N,\varkappa}=(\varkappa-1)[k(N)-(\varkappa/2)N+\varkappa]$, etc. On voit ainsi que, si les k correspondants sont connus en fonction de N, tous les autres $e_{\lambda,N,\varkappa}$ sont faciles à déterminer. En effet en introduisant au lieu de $k(N)$ les valeurs de k empruntées à la deuxième ligne du tableau ([4]), on obtient toutes les autres lignes de ce tableau. C'est pourquoi comme nous avons déjà fait remarquer dans 2 de la Note ([4]) ce sont seulement les inégalités (A) qu'on doit établir et démontrer; toutes les autres suivent presque automatiquement.

Étant donné l'importance de (A), citons encore les grands traits de deux autres démonstrations de l'expression donnée dans ([4]), ([1]) pour $k_{N,\varkappa}$. *L'une de ces démonstrations* est basée sur le fait que les simplex existent et que leurs k correspondent exactement à la valeur $k_{N,\varkappa}$ calculée dans ([4]). Il en découle que le nombre limite de $K_{N,\varkappa}$ ne dépasse pas la valeur donnée de $k_{N,\varkappa}$. Supposons pour un instant qu'il existe un polytope $P_{N,\varkappa}$ ayant $K_{N,\varkappa}<k_{N,\varkappa}$. Supprimons un sommet de ce polytope; cette opération fait disparaître $\varkappa-1$ lignes ou plus qui doivent être en partie remplacées par de nouvelles liaisons pour conserver la saturation. Il est évident qu'on ne peut pas, avec la suppression, diminuer $k_{N,\varkappa}$ d'un nombre inférieur à $\varkappa-1$. En appliquant cette opération $N-4$ fois à $P_{N,\varkappa}$, on arrive à un $P_{4,4}$ qui ne peut pas être autre chose qu'un tétraèdre (parce qu'il existe un seul $P_{4,4}$). Avec la supposition faite à propos de $K_{N,\varkappa}$, on

arrive à $k_{4,4}$ (pour $P_{4,4}$) plus petit de six. Ceci est impossible et tout est démontré. *L'autre démonstration* est encore plus simple. Elle se base sur le fait que toutes les propriétés des simplex (satisfaisant à l'expression donnée de $k_{N,\varkappa}$) sont des *propriétés extrémales*. Il est facile de construire des polytopes ayant $K_{N,\varkappa} > k_{N,\varkappa}$ donné. Or le simplex correspond à une extrémale, et $k_{N,\varkappa}$ est cette extrémale. C'est-à-dire $k_{N,\varkappa}$ est la valeur limite. Pour $k'_{N,\varkappa}$ on ne peut pas donner des formules aussi simples que celles obtenues dans (4), parce que cette fonction a quelque sorte d'un point de rebroussement près $\varkappa = N/2$. Pour la partie supérieure de l'intervalle, c'est-à-dire pour $N/2 < \varkappa < N$, on trouve facilement $\bar{k}_{N,\varkappa} = (N^2/2) - (3N/2) + \varkappa$.

(*) Séance du 20 janvier 1958.
(1) *Comptes rendus*, **237**, 1953, p. 1310; *Publ. Inst. Statistique*, 1954, p. 179, Paris.
(2) *Ibid.*, **243**, 1956, p. 472 et 1595.
(3) *Ibid.*, **244**, 1957, p. 717; *Bull. Acad. Belgique*, 1957, p. 543.
(4) *Ibid.*, **245**, 1957, p. 2461.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Pseudogroupes infinitésimaux. Pseudogroupes infinitésimaux de Lie.* Note (*) de Mlle **Paulette Libermann** (1), présentée par M. Arnaud Denjoy.

On définit les pseudogroupes infinitésimaux (p. i.) de Lie. Le p. i. E attaché à un pseudogroupe de Lie est un p. i. de Lie, de même ordre, même type, même degré. La notion de p. i. de Lie de type fini et transitif est celle « d'espace localement homogène de Lie » introduite par C. Ehresmann (2). Certains points de vue exposés ici sont proches aussi de la théorie de A. Weil (3).

Sur la variété V_n, de classe C^∞, de dimension n, on désignera par $\mathfrak{S}^s(V_n)$ la variété des s-jets de tous les relèvements locaux de V_n dans $T(V_n)$ et par $\mathfrak{S}^s_x(V_n)$ l'espace vectoriel de tous les s-jets de source x. Toute transformation infinitésimale locale (t. i. l.) X sur V_n se prolonge en une t. i. l. X^{s+1} sur $J^s(V_n, V_n)$, variété des s-jets de V_n dans V_n, car le noyau de groupe de transformations f_t sur V_n, défini par X, se prolonge sur $J^s(V_n, V_n)$ en un noyau de groupe de transformations $f_t^{s+1} : a^s \to a^s(j^s_x f_t)^{-1}$ où $a^s \in J^s(V_n, V_n)$ a pour source x. Ceci permet de définir *la dérivée de Lie d'un élément différentiel d'ordre supérieur* et l'on rejoint le point de vue de C. Ehresmann (déplacement infinitésimal d'une fibre) (4).

Proposition 1. — *Pour tout $x \in V_n$, il existe un isomorphisme canonique ψ_x de l'espace vectoriel $\mathfrak{S}^s_x(V_n)$ sur l'espace tangent en j^s_x (s-jet de l'application identique de V_n) à $J^s_x(V_n, V_n)$ (variété des s-jets de but x de V_n dans V_n) : pour toute t. i. l. X dont la source U contient x, le s-jet $j^s_x X$ du relèvement X de U dans $T(V_n)$ s'identifie canoniquement au vecteur $X^{s+1}(j^s_x)$, d'origine j^s_x, relèvement dans $J^s(V_n, V_n)$ du vecteur $X(x)$.*

En effet X détermine un noyau de groupe de transformations f_t s'exprimant au voisinage de x par les équations

$$x_t^i = x^i + X^i(x)t + \varepsilon^i t^2 \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

d'où

$$\frac{\partial x_t^i}{\partial x^j} = \delta_j^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x)t + \eta_j^i t^2.$$

Le vecteur $X^2(j_x^1) = \lim_{t \to 0} (1/t)[(j_x^1 f_t)^{-1} - j_x^1]$ a pour composantes : $-X^i$, $-\partial X^i/\partial x^j$; d'autre part $j_x^1 X$ est le jet : x^i, X^i, $\partial X^i/\partial x^j$. On démontre la proposition pour s quelconque par dérivations successives. Pour tout $a^s \in J^s(V_n, V_n)$, de source x, le vecteur $X^{s+1}(a^s)$ est déterminé par le jet $j_x^s X$.

L'espace quotient $\mathfrak{S}_x^s(V_n)/\mathfrak{S}_x^0(V_n)$, isomorphe à l'espace vectoriel des vecteurs tangents à $J_x^s(V_n, V_n)$ se projetant suivant un vecteur tangent à V_n s'identifie également à $L_{n,n}^s$ (espace des s-jets de R^n dans R^n de source et but O), qu'on peut munir d'une structure d'algèbre de Lie $\mathcal{L}_n^s$ définie par $\{a^s, b^s\} = b^s a^s - a^s b^s$ (où $b^s a^s$ est le composé des jets a^s et b^s) et l'on démontre que $\mathcal{L}_n^s$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe L_n^s, ensemble des jets inversibles de $L_{n,n}^s$. En particulier $\mathfrak{S}_x^1(V_n)/\mathfrak{S}_x^0(V_n)$ s'identifie à l'espace des $n \times n$-matrices, muni de la structure d'algèbre de Lie usuelle.

Soit E un *pseudogroupe infinitésimal* (p. i.) sur V_n ; le même raisonnement que dans (I) montre que E admet un *prolongement holoédrique* $\mathcal{E}^{s+1}$ sur $J^s(V_n, V_n)$ d'où isomorphisme des faisceaux correspondants. Soit $J^s(E)$ l'ensemble des s-jets des relèvements locaux de V_n dans $T(V_n)$ déterminés par tous les $X \in E$; le crochet [ ] définit une application de $J^{s+1}(E) \times J^{s+1}(E)$ dans $J^s(E)$. En chaque $x \in V_n$, l'ensemble $J_x^s(E)$ des s-jets de source x est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ et est donc de *dimension finie*. Le crochet { } définit dans $J_x^s(E)/J_x^0(E)$ une structure d'algèbre de Lie : $J_x^s(E)$ sera alors dit sous-espace vectoriel *stable* de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$; inversement soit Σ^s un système linéaire à coefficients constants sur $\mathfrak{S}^s(V_n)$ définissant en chaque point x' d'un voisinage de x un sous-espace stable de $\mathfrak{S}_{x'}^s(V_n)$; on démontre que l'ensemble des germes en x des solutions de Σ^s est une algèbre de Lie pour le crochet [ ].

Le p. i. E sera dit *complet d'ordre q* si E est l'ensemble des solutions de $J^q(E)$, $J^{q-1}(E)$ ne jouissant pas de cette propriété.

DÉFINITION 1. — *Un pseudogroupe infinitésimal de Lie est un p. i. E de t. i. l. analytiques tel que :* 1° E *soit complet d'ordre* q ; 2° *pour* $s = 0, \ldots, q$, $J^s(E)$ *soit une sous-variété analytique de* $\mathfrak{S}^s(V_n)$.

Pour $s = 0, \ldots, q$, $J^s(E)$ est défini localement par un système Σ^s d'équations aux dérivées partielles d'ordre s, linéaire, homogène, dont les coefficients sont des fonctions analytiques des coordonnées locales telles qu'en chaque x, Σ^s définisse un sous-espace vectoriel *stable* de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$, de *dimension constante* sur V_n. Si $J_x^0(E)$ s'identifie à l'espace tangent T_x à V_n en x (il n'y a pas alors d'équations d'ordre zéro), E est dit *transitif* ; dans ce cas les germes de t. i. l.

engendrant $J^{\lambda}_{x}(E)$ définissent un germe d'orbite qui peut être déterminé par la composante connexe de x dans V_n ; le *pseudogroupe engendré par* E *est transitif* et les coefficients dans Σ^s sont des constantes. Tout p. i. transitif, complet d'ordre q, est un p. i. de Lie. On définit les p. i. de Lie *intransitifs*.

DÉFINITION 2. — *Un p. i. de Lie est dit de type fini, de degré r, s'il existe un entier r tel que* $J^r(E)$ *soit isomorphe à* $J^{r-1}(E)$*; il est dit de type infini dans le cas contraire.*

Si E est de degré r, $J^r(E)$ est défini localement par un système d'équations Σ^r dans lequel (ainsi que dans ses prolongements), les dérivées d'ordre $\geq r$ s'expriment en fonction des dérivées d'ordre $\leq r-1$; donc si $r' > r$, $J^{r'}(E)$ est isomorphe à $J^{r-1}(E)$; tout $b^{r-1} \in J^{r-1}(E)$ détermine un jet local $b^{\lambda} \in J^{\lambda}(E)$. Donc *le faisceau d'algèbres de Lie* $J^{\lambda}(E)$ *est une variété isomorphe à* $J^{r-1}(E)$; en tout $x \in V_n$, $\dim J^{\lambda}_{x}(E) = \dim J^{r-1}_{x}(E) =$ entier m (indépendant de x). Inversement si E est un p. i. de Lie tel que $\dim J^{\lambda}_{x}(E) = m$, comme $\dim J^{s}_{x}(E)$ croît avec s et par suite $\dim J^{\lambda}_{x}(E) \geq \dim J^{s}_{x}(E)$, il existe un entier r tel que $\dim J^{r}_{x}(E) = \dim J^{r-1}_{x}(E)$, d'où :

THÉORÈME 1. — *Si* E *est un p. i. de Lie de type fini (resp. de type infini), alors l'algèbre de Lie* $J^{\lambda}_{x}(E)$ *est de dimension finie (resp. infinie).*

THÉORÈME 2. — *Si* Γ *est un pseudogroupe de Lie transitif (resp. intransitif), le p. i.* E *attaché à* Γ *est un p. i. de Lie transitif (resp. intransitif), de même ordre, même type et* $\dim J^{q}(E) = \dim J^{q}(\Gamma)$. *Si* Γ *est de type fini,* Γ *et* E *sont de même degré.*

La démonstration de ce théorème qui utilise la proposition 1, sera publiée ailleurs. Elle introduit le prolongement holoédrique E^s de E à la variété $J^{s-1}(\Gamma)$ qu'on appellera le $s^{\text{ième}}$ *prolongement canonique de* E.

On démontre comme dans (I) que $J^{\lambda}(E)$ admet une structure fibrée généralisée associée à $J^{\lambda}(\Gamma)$. De même pour tout entier s, $J^{s}(\Gamma)$ est un groupoïde d'opérateurs sur $J^{s-1}(E)$; si Γ est *transitif*, la variété $J^{s}_{0}(\Gamma)$ (où O est un point fixe de V_n), isomorphe à la variété des s-repères, est un espace fibré principal à groupe structural de Lie ; il en résulte que $J^{s-1}(E)$ est un espace fibré ordinaire associé à $J^{s}_{0}(\Gamma)$. Si Γ est de plus de *type fini*, de degré r, alors $J^{\lambda}(E)$ est isomorphe à $J^{r-1}(E)$ et $J^{\lambda}(\Gamma)$ à $J^{r}(\Gamma)$; donc dans ce cas le faisceau $J^{\lambda}(E)$ est *localement constant* ; par suite si V_n est de plus simplement connexe, le faisceau est *constant* [5] : $J^{\lambda}(E)$ s'écrit $V_n \times \mathfrak{h}$; d'où

THÉORÈME 3. — *Sur une variété* V_n *simplement connexe, le p. i. E attaché à un pseudogroupe de Lie* Γ *transitif, de type fini, est déduit par localisation d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$.

Nous dirons que V_n est *complète* si toute t. i. globale X définit un groupe à un paramètre. Supposons de plus $J^r(\Gamma)$ connexe : dans ce cas le pseudogroupe engendré par le p. i. E attaché à Γ (*cf.* I) est identique à Γ. On déduit alors du théorème 3 le théorème suivant démontré autrement par C. Ehresmann [6] :

THÉORÈME 4. — *Sur une variété* V_n *complète, simplement connexe, un pseudo-*

groupe de Lie Γ, *transitif, de type fini, de degré r, tel que* $J^r(\Gamma)$ *soit connexe, est déduit par localisation d'un groupe de transformations de Lie.*

(1) Cette Note fait suite à une Note antérieure (désignée par I) dont elle utilise les notations. *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 41.
(2) *Ens. Math.*, 5-6, 1936, p. 320.
(3) *Colloq. Int. Géom. Diff. C. N. R. S.*, Strasbourg, 1953, p. 111.
(4) *Atti del V Congresso dell' Unione Math. Ital.* Pavia, Torino, 1956.
(5) *Séminaire H. Cartan*, Exposé 14, 1950-1951 (Polycopié).
(6) *Int. Congr. of Math.*, Amsterdam, 1, 1954, p. 478.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Le problème « limite central » pour les variables aléatoires échangeables.* Note (*) de M. **Hans Bühlmann**, présentée par M. Georges Darmois.

On donne dans le cas des variables aléatoires échangeables à variance finie la réponse aux questions classiques du problème « limite central » : *a.* quelle est la classe de lois limites des sommes normées ? *b.* Quelles sont les conditions pour la convergence ? La recherche est basée sur le théorème de B. de Finetti pour les variables aléatoires échangeables.

1. Définition et théorème de B. de Finetni. — Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires.

Définition. — Les X_i sont appelées échangeables, si la distribution jointes de n variables quelconques $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_n}$ est la même que celle des $X_1, X_2, \ldots, X_n$, soit $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Théorème de B. de Finetti (1). — Nous l'énonçons ici sous la forme donnée par M. Loève (2) : *On peut trouver un strict sous-champ* $\mathcal{C}$ *du champ des événements tel que par rapport à* $\mathcal{C}$ *les variables aléatoires échangeables soient conditionnellement indépendantes et identiquement distribuées :*

$$F_n^{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_1^{\mathcal{C}}(x_j).$$

2. Analyse du théorème de B. de Finetti et description du sous-champ. — Prenons comme espace de probabilité $\{R^\infty, \mathcal{B}^\infty, P\}$ où

$$R^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} R^n \qquad (R_k, \text{ droite réelle}),$$

$\mathcal{B}^\infty$, champ engendré par les cylindres dont les bases sont les ensembles de Borel dans les sous-espaces à dimension finie;

P, la probabilité qui définit la loi de la suite des variables échangeables.

Considérons le groupe $\mathfrak{T}^\infty$ des permutations des coordonnées dans R^∞ et

soit T_t^x un élément spécifié de ce groupe. Soient $R^N = \prod_{N=1}^{n} R_n$, $\mathcal{B}^N$ et $\mathcal{T}^N$ les restrictions de $\mathcal{B}^\infty$ et $\mathcal{T}^\infty$ dans R^N et f une fonction de Borel de R^∞ à R^1. Supposons, que $Ef(X)$ et $E(X_1)$ existent.

THÉORÈME 1. — $E^{\mathcal{C}} f(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} f(T_j^n X)$ *presque sûrement.*

COROLLAIRE 1. — $E^{\mathcal{C}}(X_1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ *presque sûrement.*

COROLLAIRE 2. — $P^{\mathcal{C}}(X_1 < t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{[X_i < t]}$ *presque sûrement.*

Remarque. — Le corollaire 1 est dû à M. Loève ([3]).

THÉORÈME 2. — *Pour toute collection finie de cylindres* B_{k_j} *avec base* b_{k_j} *sur* R_k *on a*

$$P^{\mathcal{C}}\left(\bigcap_{j=1}^{m} B_{k_j} \right) = \prod_{j=1}^{m} P^{\mathcal{C}}(B_{k_j}) \quad \textit{presque sûrement.}$$

3. LA CLASSE DES LOIS LIMITES DE SOMMES NORMÉES DES VARIABLES ALÉATOIRES ÉCHANGEABLES. — Nous ne considérons ici que le cas des variances finies. Le cas des variances infinies sera donné ailleurs. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables échangeables avec $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = \sigma^2$ et considérons la classe des limites de

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{B_n} < t \right] = \int P^{\mathcal{C}}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{B_n} < t \right] dP_{\mathcal{C}}.$$

($P^{\mathcal{C}}$ est le symbole pour la probabilité conditionnelle, $P_{\mathcal{C}}$ représente la restriction de la probabilité au champ $\mathcal{C}$).

Puisque l'intégrande est bornée, le théorème de Lebesgue s'applique et l'on peut passer à la limite sous le signe d'intégration pourvu que la limite de l'intégrande existe. Le problème se réduit donc au problème des lois limites des sommes de variables indépendantes et identiquement distribuées suivi d'une intégration.

THÉORÈME 3. — *Les distributions limites des sommes normées de variables aléatoires échangeables avec variances finies sont les lois normales pondérées à fonction caractéristique de la forme :*

$$f(u) = \int e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}} dF(\sigma^2).$$

4. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR LA CONVERGENCE VERS UN ÉLÉMENT DE LA CLASSE DES LOIS LIMITES. — On a toujours convergence au sens faible ([4]). La convergence au sens complet dépend essentiellement du choix de la suite des B_n.

THÉORÈME 4. — α. *Si* $B_n = n.c$ *alors on a* $\sum_{i=1}^{n} X_i/B_n \to E^{\mathcal{C}}(X_1/c)$ *presque sûrement.*

β. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence complète avec des* B_n *de l'ordre* $o(n)$ *sont les suivantes :*

a. $\sum_{i=1}^{n} X_i/n \to 0$ *presque sûrement ;*

b. $B_n/\sqrt{n} \to c$ *où* $0 < c < \infty$.

Remarque. — Nous avons exclu le cas banal où $E(X_i^2) = 0$.

THÉORÈME 5. — *Soit* $B_n = \sqrt{n}$:

α. $F(\sigma^2) = P\{E^{\mathcal{C}} X_i^2 < \sigma^2\} = P\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i^2/n < \sigma^2\right\}$;

β. $F(\sigma^2)$ est dégénéré si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} X_i^2/n \to$ constante en probabilité.

COROLLAIRE. — *On a convergence vers une loi normale* (*non pondérée*) *si et seulement si*

a. $\sum_{i=1}^{n} X_i/n \to 0$ *presque sûrement ;*

b. $\sum_{i=1}^{n} X_i^2/n \to c$ *en probabilité.*

Dans le cas des sommes normées de variables aléatoires indépendantes à moyenne nulle la condition *a* est toujours satisfaite tandis que *b* devient la condition de Raikov (⁵). Le corollaire contient également dans le cas des sommes normées un théorème de H. Chernoff et H. Teicher (⁶) qui donne des conditions suffisantes, mais non nécessaires.

(*) Séance du 23 décembre 1957.

(¹) BRUNO DE FINETTI, *ré*, 7, 1937, p. 1-68.

(²) M. LOÈVE, *Probability Theory*. D. van Nostrand, New-York, 1955, p. 364.

(³) *Loc. cit.* (²), p. 400.

(⁴) *Loc. cit.* (²), p. 178.

(⁵) D. A. RAIKOV, *Izvestiya Akad. Nauk. S. S. S. R.*, Ser. Mat., 1938, p. 323-328.

(⁶) H. CHERNOFF et H. TEICHER, *Technical Report*, n° 8, Dept. of Statistics, Stanford University, 1957.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les pertes d'information imputables à certaines estimations biaisées.* Note (*) de M. **PIERRE THIONET**, présentée par M. Georges Darmois.

1. *Introduction.* — On a vu dans une précédente Note (¹) que l'expression $\mathcal{E}W(Z, \zeta)$ ne représentait qu'exceptionnellement la perte d'information

[définie antérieurement (²)] imputable à l'estimation biaisée de ζ par Z. Il reste à trouver son expression dans des cas aussi courants que le ratio ($Z = B/A$ estimant $\zeta = b/a$ avec $\mathcal{E}A = a$, $\mathcal{E}B = b$) ou encore le coefficient de corrélation.

2. *Une solution.* — Alors que ni $UZ = \mathcal{E}Z^2 - \zeta^2 + [\zeta^2 - (\mathcal{E}Z)^2]$ ni $\mathcal{E}(Z - \zeta)^2 = \mathcal{E}Z^2 - \zeta^2 + 2\zeta(\zeta - \mathcal{E}Z)$ ne sont plus des pertes d'information, il en existe d'évidentes en ce sens que la relation de récurrence [*voir* (²)] est manifestement vérifiée, telles :

$$\mathcal{E}Z^2 - \zeta^2 \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}\,\Phi(Z) - \Phi(\zeta)$$

où Φ est une *fonction* arbitraire, sous réserve qu'on ait bien

$$\Phi(\zeta) < \mathcal{E}\,\Phi(Z_1) < \mathcal{E}\,\Phi(Z_2)\ \ldots$$

avec les notations de la Note précédente (¹), et que Z_2 se réduise bien à Z_1 lorsque l'échantillon E_2 recouvre E_1 ; c'est ce qu'on a appelé estimation *uniformément cohérente* (« consistent »), notion un peu plus large que l'estimation *isomorphe* (l'expression de ζ à laquelle se réduit Z lorsque E recouvre l'univers U pouvant être plus simple que celle de Z). Toute fonction arbitraire $g(Z)$ est d'ailleurs estimateur isomorphe de $g(\zeta)$, ce qui explique l'arbitraire laissé à la fonction Φ.

3. *Le point de vue de Wald-Basu* (³). — On peut également exiger de la perte d'information qu'elle soit de la forme $\mathcal{E}\,W_0(Z)$ où W est fonction de Z, telle que $W_0(\zeta) = 0$, et *fonctionnelle* de la distribution $X \in U$ des variables étudiées X sur l'univers U.

On ne peut plus établir que la perte est nécessairement de la forme $\mathcal{E}\Phi(Z) - \Phi(\zeta)$, si l'on n'est assuré qu'elle dépend de $U(X)$ par le seul ζ. En adaptant la démonstration du théorème I de la Note précédente, on établit seulement que

$$\mathcal{E}\,W_0(Z) = \mathcal{E}\,\Phi_0(Z) - \Phi_0(\zeta)$$

et l'on peut donc toujours poser :

$$W_0(Z) = \Phi_0(Z) - \Phi_0(\zeta) + \Delta_0(Z)$$

avec

$$\Delta_0(\zeta) = 0, \qquad \mathcal{E}\,\Delta_0(Z) = 0,$$

où Φ_0 et Δ_0 sont fonctionnelles des $X \in U$ et fonctions de Z.

Dans les cas visés, le lien entre estimateur Z et estimé ζ est de la forme

$$\zeta = f(U), \qquad Z = F(E),$$

avec (symboliquement) $\mathcal{E}(E) = U$. Plus concrètement, on étudie ici le cas où il existe des fonctionnelles $a, b, c, \ldots$ des ($X \in U$) et A, B, C, ... des ($X \in E$), telles que $\zeta = f(a, b, c, \ldots)$, $Z = f(A, B, C, \ldots)$ avec $\mathcal{E}A = a$, $\mathcal{E}B = b$, $\mathcal{E}C = c$.

Il s'ensuit que [sous des conditions de régularité (⁴) convenables] on a

nécessairement :

$$\Delta_0 = 2\Psi_0(\zeta)\omega_0$$

en posant

$$\Phi_0 = \Psi_0^2,$$

avec

$$\omega_0 = \alpha(a - \mathrm{A}) + \beta(b - \mathrm{B}) + \gamma(c - \mathrm{C}) + \ldots,$$

où α, β, γ, ... sont fonctions des $\mathrm{X} \in \mathrm{U}$.

Ainsi ω_0, Δ_0, Φ_0 ni W_0 ne peuvent dépendre de $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$ par le seul Z ; et il faut d'une façon ou d'une autre *élargir* le concept de Wald-Basu.

4. *Le point de vue élargi.* — Si l'on admet que W_0 et Δ_0 sont fonctions des A, B, C, ... (et non plus de Z), on peut étendre comme suit le théorème fondamental de la précédente Note.

Théorème. — *La perte d'information, réversible en* Z *et* ζ *est nécessairement*

$$\mathcal{E}\mathrm{W}_0[\mathrm{Z}] = \mathcal{E}\big(\Psi_0[\mathrm{Z}] - \Psi_0[\zeta]\big)^2 = \mathcal{E}\Psi_0^2[\mathrm{Z}] - \Psi_0^2[\zeta],$$

où les crochets signifient qu'il faut entendre Ψ_0 *fonction des* A, B, C, ... *pour* [Z] *ou des* a, b, c, ... *pour* [ζ].

En effet, appelant $\Psi_0[\zeta]$ et $\Psi_0[\mathrm{Z}]$ respectivement η et Y pour alléger, il vient en définitive

$$\mathrm{W} = \mathrm{Y}^2 - \eta^2 + 2\eta\omega,$$

avec

$$\omega = \alpha(a - \mathrm{A}) + \beta(b - \mathrm{B}) + \gamma(c - \mathrm{C}) + \ldots,$$

où W (fonction de A) doit être minimum pour $\mathrm{A} = a$, ce qui donne

$$2\mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{A}} - 2\eta\alpha = 0 \qquad \text{pour} \quad \mathrm{Y} = \eta,$$

de même pour B, C, ... d'où

$$\frac{\partial \eta}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial b} = \beta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial c} = \gamma, \qquad \ldots, \qquad d\eta = d\omega;$$

η - Y [illegible] ω

C. Q. F. D.

Mode de calcul de Ψ_0. — On a $d\zeta = f'_a\,da + f'_b\,db + f'_c\,dc + \ldots$, d'où

$$\frac{\alpha}{f'_a} = \frac{\beta}{f'_b} = \frac{\gamma}{f'_c} = \ldots, \qquad \text{d'où} \quad \mathcal{E}\mathrm{W} = \mathcal{E}(\delta\mathrm{Z} - \delta\zeta)^2,$$

en supposant l'estimation *isomorphe*, et les distributions de A, B, C *quelconques*. Un facteur arbitraire subsiste dans le choix de Ψ.

Application. — Cas du ratio

$$\zeta = \frac{b}{a}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \qquad \mathcal{E}\mathrm{A} = a, \qquad \mathcal{E}\mathrm{B} = b, \qquad \log\zeta = \log b - \log a, \qquad d\zeta = \zeta\left(\frac{db}{b} - \frac{da}{a}\right).$$

On remarquera que les errements de la technique actuelle des sondages conduisent à calculer

$$\mathcal{E}\left(\frac{B-b}{b}-\frac{A-a}{a}\right)^2=\mathcal{E}\left(\frac{B}{b}-\frac{A}{a}\right)^2,$$

parce que c'est la valeur approchée de la variance de Z (qui n'est pas une perte d'information). On pourrait aussi bien calculer (en conservant le facteur ζ),

$$\mathcal{E}\left(\frac{B-b}{a}-\frac{A-a}{b}\right)^2.$$

Cas de la corrélation : $\rho=cov(x, y)/\sigma(x)\sigma(y)$. Soit $\rho^2=\zeta$.

On posera

$$a=\frac{N\sigma^2(x)}{N-1},\qquad b=\frac{N\sigma^2(y)}{N-1},\qquad c=\frac{N\,cov(x, y)}{N-1}.$$

dont les estimateurs isomorphes A B C sont sans biais.

Ainsi à $ab\zeta-c^2=0$ correspond bien $ABZ-C^2=0$, d'où

$$\frac{d\zeta}{\zeta}=2\frac{dc}{c}-\frac{da}{a}-\frac{db}{b}\qquad \text{d'où}\quad \mathcal{E}W=\mathcal{E}\left(2\frac{C}{c}-\frac{A}{a}-\frac{B}{b}\right)^2.$$

(*) Séance du 13 janvier 1958.

(1) *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 46.

(2) *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 2464 et 246, 1958, p. 46.

(3) *Sankhyà*, déc. 1952, p. 45.

(4) Ces conditions laissent échapper le cas de la médiane, signalé antérieurement.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la convergence presque sûre d'une suite d'éléments aléatoires de type* L*. Note (*) de MM. **Miloslav Driml** et **Otto Hanš**, présentée par M. Maurice Fréchet.

Mlle E. Mourier a donné (1) une définition de l'élément aléatoire de type L* et les définitions des convergences faible et forte d'une suite d'éléments aléatoires de type L*.

Nous donnons dans cette Note deux théorèmes sur la convergence presque sûre d'une suite d'éléments aléatoires de ce type, en conservant les notations de Mlle Mourier.

Théorème 1. — *Soit* $X_0^*, X_1^*, X_2^*, \ldots$ *une suite d'éléments aléatoires de type* L*. *Pour que la suite* $X_1^*, X_2^*, \ldots$, *converge faiblement presque sûrement vers* X_0^*, *c'est-à-dire, pour que*

$$m(\langle X_n^*, x\rangle\to\langle X_0^*, x\rangle,\quad \textit{quel que soit}\quad x\in\mathfrak{X})=1,$$

il faut et il suffit qu'on ait simultanément

$$m(\textit{ensemble}\ \{\,\|X_1^*\|, \|X_2^*\|, \ldots\}\ \textit{est borné})=1$$

et

$$m(\langle X_n^*, x\rangle \to \langle X_0^*, x\rangle) = 1$$

pour tout $x \in H$ *où* H *est un ensemble dense dans* $\mathfrak{X}$.

THÉORÈME 2. — *Soit* X_0^*, X_1^*, X_2^*, ... *une suite d'éléments aléatoires de type* L^* *et supposons la mesure complète.*

Pour que la suite X_1^*, X_2^*, ... *converge fortement presque sûrement vers* X_0^*, *c'est-à-dire, pour que*

$$m(\| X_n^* - X_0^* \| \to 0) = 1$$

il faut et il suffit qu'on ait simultanément

$$m(\text{ensemble } \{X_1^*, X_2^*, \ldots\} \text{ est compact}) = 1$$

et

$$m(\langle X_n^*, x\rangle \to \langle X_0^*, x\rangle) = 1$$

pour tout $x \in H$ *où* H *est un ensemble dense dans* $\mathfrak{X}$.

Remarque 1. — Dans les deux théorèmes ci-dessus il est possible de remplacer l'ensemble H par l'ensemble $F \subset \mathfrak{X}$, satisfaisant à la condition suivante : les combinaisons linéaires d'éléments de l'ensemble F constituent un ensemble dense dans l'espace $\mathfrak{X}$.

Remarque 2. — Par le terme « compact » nous entendons « relativement compact » et non pas « compact en soi ». La condition du théorème 2 est alors plus précisément formulée de la façon suivante : l'ensemble de tous les $u \in U$, pour lesquels il existe une suite partielle $x_{n_1}^*(u)$, $x_{n_2}^*(u)$, ... (n_1, n_2, ... sont généralement dépendants de $u \in U$) satisfaisant à la condition de Cauchy, a une mesure égale à l'unité.

Remarque 3. — Spécialement, en posant $X_n^* = Z_n^*$, il est possible de déduire des conditions pour la validité de la loi des grands nombres.

(*) Séance du 18 novembre 1957.

(1) *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1956, Vol. II, p. 231-242.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur les perturbations transversales de la houle complexe plane dans les liquides pesants.* Note de M. **Pierre Gaillard**, présentée par M. Henri Villat.

Dans une Note précédente (*cf.* [1]), dont nous reprenons toutes les notations, nous avons donné au second ordre inclusivement près les composantes du déplacement d'une particule en mouvement dans la masse fluide, en supposant implicitement les $\mu_{1,j}$, $\mu_{2,j}$ et $\mu_j - \mu_k \neq 0$. Dans le cas où $\mu_{1,j}$ (ou $\mu_{2,j}$) est nul, il faut omettre les termes comportant des fonctions hyper-

boliques de $2\mu_{1,j}(z_0+h)$ [ou de $2\mu_{2,j}(z_0+h)$]. Dans le cas où : $\mu_j=\mu_k=\mu$, $j\neq k$, on a : $\nu_j=\nu_k=\nu$ en vertu de la relation $\nu_j^2=g\mu_j\,\mathrm{th}\,\mu_j h$; dans ce cas il convient de remplacer les termes comportant le facteur $a_j a_k$ par :
dans z_2 :

$$\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{a_j a_k}{16\,\mathrm{sh}^2\mu h}\,\frac{\Gamma_{j,k}^3\nu^2}{\mu^2}\,\frac{\left[\frac{3+\varepsilon_1}{2}\,\mathrm{ch}\,2\mu h+\frac{5-\varepsilon_1}{2}\right]}{(4\nu^2\,\mathrm{ch}\,\Gamma_{j,k}h-g\Gamma_{j,k}\,\mathrm{sh}\,\Gamma_{j,k}h)}\cos(\sigma_{1,j,k}x_0-\tau_{1,j,k}t)$$
$$\times\cos\sigma_{2,j,k}(y_0+a)\,\mathrm{sh}\,\Gamma_{j,k}(z_0+h)$$

dans x_2 :

$$-\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{a_j a_k}{32\,\mathrm{sh}^2\mu h}\,\frac{\Gamma_{j,k}^2\sigma_{1,j,k}}{\mu^2}\sin(\sigma_{1,j,k}x_0-\tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y_0+a)$$
$$-\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{a_j a_k}{16\,\mathrm{sh}^2\mu h}\,\frac{\Gamma_{k,j}^2\sigma_{1,j,k}}{\mu^2}\,\frac{\left[\frac{3+\varepsilon_1}{2}\,\mathrm{ch}\,2\mu h+\frac{5-\varepsilon_1}{2}\right]\nu^2}{(4\nu^2\,\mathrm{ch}\,\Gamma_{j,k}h-g\Gamma_{j,k}\,\mathrm{sh}\,\Gamma_{j,k}h)}\sin(\sigma_{1,j,k}x_0-\tau_{1,j,k}t)$$
$$\times\cos\sigma_{2,j,k}(y_0+a)\,\mathrm{ch}\,\Gamma_{j,k}(z_0+h)$$

dans y_2 :

$$-\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\frac{a_j a^k}{32\,\mathrm{sh}^2\mu h}\,\frac{\Gamma_{j,k}^2\sigma_{2,j,k}}{\mu^2}\cos(\sigma_{1,j,k}x_0-\tau_{1,j,k}t)\sin\sigma_{2,j,k}(y_0+a)$$
$$-\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{a_j a_k}{16\,\mathrm{sh}^2 h\mu}\,\frac{\Gamma_{j,k}^2\sigma_{2,j,k}}{\mu^2}\,\frac{\left[\frac{3+\varepsilon_1}{2}\,\mathrm{ch}\,2\mu h+\frac{5-\varepsilon_1}{2}\right]\nu^2}{(4\nu^2\,\mathrm{ch}\,\Gamma_{j,k}h-g\Gamma_{j,k}\,\mathrm{sh}\,\Gamma_{j,k}h)}$$
$$\times\cos(\sigma_{1,j,k}x_0-\tau_{1,j,k}t)\sin\sigma_{2,j,k}(y_0+a)\,\mathrm{ch}\,\Gamma_{j,k}(z_0+h).$$

Nous allons donner ci-après l'équation cartésienne de la surface libre puis les lois de la distribution tourbillonnaire et de la pression dans la masse liquide.

Équation de la surface libre. — En axes fixes, elle est donnée par

$$z=a_j\cos(\mu_{1,j}x-\nu_j t)\cos\mu_{2,j}(y+a)$$
$$+\frac{a_j^2\mu_{1,j}}{4\,\mathrm{sh}\,2\mu_j h}\left[\rho_{1,j}(\mathrm{ch}\,2\mu_j h+1)+\frac{1+2\rho_{1,j}^2-2\rho_{2,j}^2\,\mathrm{ch}\,2\mu_j h}{2\,\mathrm{th}\,\mu_j h\,\mathrm{coth}\,2\mu_{1,j}h-\rho_{1,j}}\right]\cos 2(\mu_{1,j}x-\nu_j t)$$
$$+\frac{a_j^2\mu_j}{4\,\mathrm{sh}\,2\mu_j h}[\rho_{2,j}^2(\mathrm{ch}\,2\mu_j h+1)-f]\cos 2\mu_{2,j}(y+a)$$
$$+\frac{a_j^2\mu_j}{4}\,\mathrm{coth}\,\mu_j h\left[1+\frac{3}{2\,\mathrm{sh}^2\mu_j h}\right]\cos 2(\mu_{1,j}x-\nu_j t)\cos 2\mu_{2,j}(y+a)$$
$$-\frac{a_j a_k}{16}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon}\Gamma_{j,k}\left\{\frac{(\mu_j\nu_k\,\mathrm{coth}\,\mu_k h+\mu_k\nu_j\,\mathrm{coth}\,\mu_j h)(\varepsilon_1\rho_{1,j}\rho_{1,k}+\varepsilon_2\rho_{2,j}\rho_{2,k})}{\Gamma_{j,k}\tau_{1,j,k}}\right.$$
$$-\psi_{j,k}\left[\frac{(\nu_j^2+\varepsilon_1\nu_j\nu_k+\nu_k^2)\,\mathrm{ch}\,\sigma_{3,j,k}h-g\,\frac{\mu_j\nu_j+\varepsilon_1\varepsilon_3\mu_k\nu_k}{\tau_{1,j,k}}\,\mathrm{sh}\,\sigma_{3,j,k}h}{\mathrm{sh}\,\mu_j h\,\mathrm{sh}\,\mu_k h(\tau_{1,j,k}^2\,\mathrm{coth}\,\Gamma_{j,k}h-g\Gamma_{j,k})}\right]$$
$$\left.+\frac{\mu_j\nu_j\,\mathrm{coth}\,\mu_j h+\mu_k\nu_k\,\mathrm{coth}\,\mu_k h}{\Gamma_{j,k}\tau_{1,j,k}}\right\}$$
$$\times\cos(\sigma_{1,j,k}x-\tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y+a).$$

avec

$$f=1, \quad \text{si} \quad \mu_{2,j}\neq 0,$$
$$f=0, \quad \text{si} \quad \mu_{2,j}=0.$$

Dans le cas où $\mu_j=\mu_k=\mu$, il convient de remplacer les termes ayant le facteur $a_j a_k$ par

$$\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\frac{a_j a_k}{16\,\mathrm{sh}^2\mu h}\left\{\Gamma^3_{j,k}\frac{\nu^2}{\mu^2}\left[\frac{3+\varepsilon_1}{2}\,\mathrm{ch}\,2\mu h+\frac{5-\varepsilon_1}{2}\right]\mathrm{sh}\,\Gamma_{j,k}h\right.$$
$$\left.+\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}+4(\varepsilon_1\rho_{1,j}\rho_{1,k}+\varepsilon_2\rho_{2,j}\rho_{2,k})\mu\,\mathrm{sh}\,2\mu h\right\}$$
$$\times\cos(\sigma_{1,j,k}x-\tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y+a).$$

Distribution tourbillonnaire. — Les composantes (ξ, η, ζ) du rotationnel en variables de Miche s'écrivent sous une forme analogue à celle de Cauchy, valable en variables de Lagrange

$$\xi=\xi^\star\frac{\partial x}{\partial x_0}+\eta^\star\frac{\partial x}{\partial y_0}+\zeta^\star\frac{\partial x}{\partial z_0},$$
$$\eta=\xi^\star\frac{\partial y}{\partial x^0}+\eta^\star\frac{\partial y}{\partial y_0}+\zeta^\star\frac{\partial y}{\partial z_0},$$
$$\zeta=\xi^\star\frac{\partial z}{\partial x_0}+\eta^\star\frac{\partial z}{\partial y_0}+\zeta^\star\frac{\partial z}{\partial z_0}$$

avec

$$\xi^\star=\frac{\partial(x',x)}{\partial(y_0,z_0)}+\frac{\partial(y',y)}{\partial(y_0,z_0)}+\frac{\partial(z',z)}{\partial(y_0,z_0)},$$
$$\eta^\star=\frac{\partial(x',x)}{\partial(z_0,x_0)}+\frac{\partial(y',y)}{\partial(z_0,x_0)}+\frac{\partial(z',z)}{\partial(z_0,x_0)},$$
$$\zeta^\star=\frac{\partial(x',x)}{\partial(x_0,y_0)}+\frac{\partial(y',y)}{\partial(x_0,y_0)}+\frac{\partial(z',z)}{\partial(x_0,y_0)}.$$

Dans le cas particulier du phénomène ne comportant aucun transport de masse, la distribution tourbillonnaire au second ordre inclusivement s'obtient en portant dans les relations précédentes les expressions de $x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y(x_0, y_0, z_0, t)$, $z(x_0, y_0, z_0, t)$ (*cf.* [1].

On trouve

$$\xi=0,$$
$$\eta=-\frac{a_j^2}{2\mu_j^2}\nu_j\rho_{1,j}[1+\rho_{1,j}^2\cos 2\mu_{2,j}(y_0+a)]\frac{\mathrm{sh}\,2\mu_j(z_0+h)}{\mathrm{sh}^2\mu_j h},$$
$$\zeta=\quad\frac{a_j^2}{2\mu_j^2}\nu_j\rho_{1,j}\rho_{2,j}[\rho_{2,j}^2-\rho_{1,j}^2\,\mathrm{ch}\,2\mu_j(z_0+h)]\frac{\sin 2\mu_{2,j}(y_0+a)}{\mathrm{sh}^2\mu_j h},$$

Calcul de la pression : en utilisant les conventions d'écriture de (1) et en

prenant pour origine des pressions la pression atmosphérique, on a

$$\frac{p}{\rho g} = -z + \frac{a_j}{\operatorname{ch}\mu_j h}\cos(\mu_{1,j}x - \nu_j t)\cos\mu_{2,j}(y+a)\operatorname{ch}\mu_j(z+h)$$

$$+ \frac{a_j^2\mu_j}{4\operatorname{sh}2\mu_j h}\Big\{ l - 3\rho_{1,j}^2\cos 2(\mu_{1,j}x-\nu_j t) - \rho_{2,j}^2\cos 2\mu_{2,j}(y+a)$$

$$- 3\cos 2(\mu_{1,j}x-\nu_j t)\cos 2\mu_{2,j}(y+a)$$

$$+ \operatorname{ch}2\mu_j(z+h)\Big[1 + 3\rho_{2,j}^2\cos 2(\mu_{1,j}x-\nu_j t) + \rho_{1,j}^2\cos 2\mu_{2,j}(y+a)$$

$$+ \frac{3}{\operatorname{sh}^2\mu_j h}\cos 2(\mu_{1,j}x-\nu_j t)\cos 2\mu_{2,j}(y+a)\Big]$$

$$+ \frac{2m(1+2\rho_{1,j}^2 - 2\rho_{2,j}^2\operatorname{ch}2\mu_j h)\nu_j^2}{2\nu_j^2\operatorname{ch}2\mu_{1,j}h - g\mu_{1,j}\operatorname{sh}2\mu_{1,j}h}\cos 2(\mu_{1,j}x-\nu_j t)\operatorname{ch}2\mu_{1,j}(z+h)\Big\}$$

$$+ \frac{a_j a_k \nu_j \nu_k}{8\operatorname{sh}\mu_j h\operatorname{sh}\mu_k h g}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\varepsilon_1\Psi_{j,k}\cos(\sigma_{1,j,k}x - \tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y+a)\operatorname{ch}\sigma_{3,j,k}(z+h)$$

$$- \frac{a_j a_k \tau_{1,j,k}^2}{8g\operatorname{sh}\mu_j h\operatorname{sh}\mu_k h}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Phi_{j,k}\Psi_{j,k}\cos(\sigma_{1,j,k}x - \tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y+a)\operatorname{ch}\Gamma_{j,k}(z+h),$$

avec

$l = 1,$	si $\mu_{1,j} \neq 0$ et $\mu_{2,j} \neq 0,$
$l = 2,$	si $\mu_{2,j} = 0,$
$l = 1 + \cos 2\nu_j t(1 - 2\operatorname{ch}2\mu_j h),$	si $\mu_{1,j} = 0;$
$m = 1$	si $\mu_{1,j} \neq 0,$
$m = 0$	si $\mu_{1,j} = 0.$

Dans le cas où $\mu_j = \mu_k = \mu$, $j \neq k$, il conviendra de remplacer les termes comportant le facteur $a_j a_k$ par

$$\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\frac{a_j a_k \Gamma_{j,k}^2\nu^2\left[\frac{3+\varepsilon_1}{2}\operatorname{ch}2\mu h + \frac{5-\varepsilon_1}{2}\right]}{4g\mu^2\operatorname{sh}^2\mu h(4\nu^2\operatorname{ch}\Gamma_{j,k}h - g\Gamma_{j,k}\operatorname{sh}\Gamma_{j,k}h)}$$

$$\times\cos(\sigma_{1,j,k}x - \tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y+a)\operatorname{ch}\Gamma_{j,k}(z+h)$$

$$+\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} + \frac{3a_j a_k\Gamma_{j,k}^2\nu^2}{16g\mu^2\operatorname{sh}^2\mu h}\cos(\sigma_{1,j,k}x - \tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y+a)$$

$$-\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\frac{a_j a_k}{8\operatorname{sh}^2\mu h}(1 - \varepsilon_1\rho_{1,j}\rho_{1,k} - \varepsilon_2\rho_{2,j}\rho_{2,k})\frac{\nu^2}{g}$$

$$\times\cos(\sigma_{1,j,k}x - \tau_{1,j,k}t)\cos\sigma_{2,j,k}(y+a)\operatorname{ch}2\mu(z+h).$$

(1) P. GAILLARD, *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 2184.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur la possibilité d'études hydrodynamiques en modèle réduit de dunes désertiques isolées du type barkhane.* Note (*) de MM. **Étienne Crausse** et **Georges Pouzens**, transmise par M. Charles Camichel.

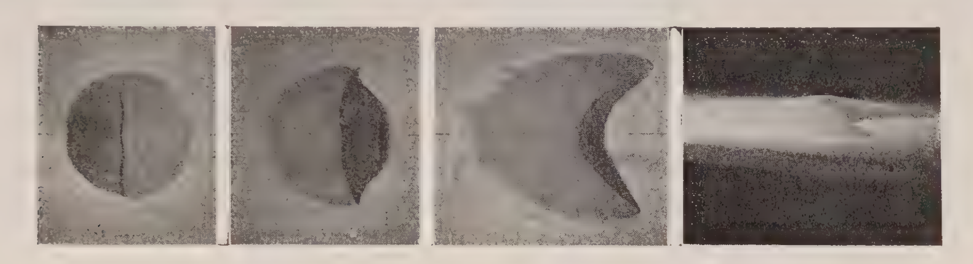
Formation et déplacement d'un modèle de dune barkhane disposé au fond d'un canal et soumis à l'action d'un courant d'eau.

L'étude en soufflerie de formations dunaires majeures paraît se heurter à certaines difficultés inhérentes au comportement du matériau granuleux utilisé, tout au moins si l'on opère à une échelle trop faible. Par contre, il paraît possible d'aborder un tel problème en utilisant l'eau comme fluide, le matériau étant un sable convenablement choisi. C'est ce que nous avons tenté de faire à propos de l'évolution et du déplacement d'une dune barkhane isolée, soumise à l'action d'un vent unidirectionnel et évoluant sans apports éoliens. Dans ce but, le modèle de dune est disposé sur le fond plat d'un canal, ce fond étant inafouillable et relativement lisse. On évite ainsi l'existence d'une saltation d'attaque qui, sur un modèle analogue préalablement étudié en soufflerie, nous a paru prendre une ampleur manifestement exagérée au regard des dimensions du modèle, tout au moins avec les matériaux (sable, liège, sciure de bois) dont nous avions pu disposer.

L'expérience est conduite à partir d'un tas de sable conique à pente naturelle, obtenu en versant du sable sur le fond du canal à l'aide d'un guide cylindrique calibré, l'eau étant en repos durant cette opération. Ceci fait, le liquide est très progressivement mis en vitesse jusqu'à ce que celle-ci atteigne une valeur jugée suffisante, que l'on maintient ensuite constante dans le temps. Les clichés joints montrent les transformations progressives du cône d'origine, aboutissant à un modelé en forme de croissant qui paraît bien être celui d'une barkhane isolée, tout au moins dans l'essentiel de ses traits morphologiques, le plan axial du croissant étant parallèle à la direction générale de l'écoulement. Ainsi formée, cette « barkhane » se déplace progressivement vers l'aval en conservant sa forme générale et ses dimensions. De même que sur les barkhanes du désert, on observe qu'un tel mouvement d'ensemble est lié au déplacement progressif des grains de sable superficiels, dirigé de la face amont de la dune vers le creux d'éboulis aval ou vers les cornes latérales.

La vitesse du courant est choisie suffisamment grande pour permettre le déplacement des grains sur la dune, tout en restant inférieure à la limite à partir de laquelle la dune « fume », afin qu'il y ait conservation de la masse dunaire en mouvement.

On opère sur un canal rectangulaire de largeur 50 cm, de profondeur 20 cm, à parois latérales vitrées, la vitesse moyenne étant de 24 cm/s, le tirant d'eau de 15 cm. Le sable utilisé, de densité 2,61, a une granulométrie telle que 95 % du poids de ce sable est formé de grains passant au tamis de 0,58 mm et restant sur le tamis de 0,12 mm. A partir d'un cône d'origine de diamètre 11 cm, la hauteur de la dune finalement obtenue est de 3 cm environ. La zone d'expérience, est choisie voisine de l'entrée du canal afin que l'écoulement soit pratiquement en bloc dans la majeure partie de la zone intéressante. Dans ces conditions, la couche limite au fond a une épaisseur de l'ordre du centimètre.



Diverses phases de l'évolution du cône d'origine et aspect final de la « barkhane » obtenue (le courant d'eau va de la gauche vers la droite).

La rapidité de formation de la dune croît naturellement avec la vitesse du courant. Par ailleurs, l'allure de la ligne de contact amont avec le fond du canal paraît dépendre, dans une certaine mesure, de la rugosité de ce dernier. La comparabilité des résultats obtenus est satisfaisante, compte tenu de la nature d'un tel problème.

Il nous a paru intéressant d'appliquer à ces résultats les conclusions formulées par M. Escande ([1]) à propos d'un problème de même nature, dans lequel intervient simultanément, d'après cet auteur, une similitude à l'échelle de la dune et une similitude à l'échelle des grains entre le modèle étudié (sable dans l'eau) et une dune réelle de dimensions géométriquement semblables (sable dans l'air). Pour des rapports (entre modèle et dune réelle) de 800 pour les densités de fluide, de 1/1,61 pour les densités du matériau sableux dans son fluide, de 1/15 pour les viscosités cinématiques des deux fluides, l'expérience ci-dessus correspondrait à une dune réelle de 22 m de hauteur, soumise à un vent de vitesse 6,4 m/s, cette dune étant formée d'un sable dont les dimensions linéaires de grains seraient 1,8 fois moindres que les dimensions homologues du sable expérimenté. De tels ordres de grandeur ne sont pas incompatibles avec ceux observés par certains auteurs sur des barkhanes désertiques ([2]).

Les observations ci-dessus paraissent justifier l'hypothèse souvent avancée d'après laquelle la formation d'une barkhane isolée est essentiel-

lement liée à l'existence d'un vent unidirectionnel. Elles devront être confirmées et complétées dans des canaux plus grands, actuellement en voie de construction. Ceux-ci permettront sans doute également de préciser et de développer d'autres résultats obtenus, relatifs notamment à l'action continue ou périodique, sur la barkhane, d'un courant oblique par rapport au courant initial.

(*) Séance du 13 janvier 1958.

(1) L. Escande, *Mémoires et Travaux de la Société Hydrotechnique de France*, n° A, 1950.

(2) R. A. Bagnold, *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*, Methuen, London, 1941, p. 215-216.

AÉRODYNAMIQUE. — *Calcul de la couche limite laminaire dans un écoulement compressible avec gradient de pression et paroi thermiquement isolée.* Note (*) de M. **Bernard Le Fur**, présentée par M. Joseph Pérès.

Une généralisation de la transformation de Howarth-Stewartson permet de traiter le problème de la couche limite laminaire avec gradient de pression et de calculer le coefficient de frottement dans le cas d'un nombre de Prandtl constant mais différent de 1.

1. On veut, dans le cas d'un gradient longitudinal de pression, ramener au problème de la couche limite laminaire d'un fluide à propriétés physiques constantes, l'étude de la couche limite laminaire d'un gaz à propriétés physiques variables, en supposant toutefois le gaz parfait, le rapport des chaleurs spécifiques γ et le nombre de Prandtl $\mathcal{L}$ indépendants de la température, la viscosité μ seule est une fonction de la température absolue θ dont on connaît l'expression analytique.

L'indice o désignera les grandeurs relatives au gaz ramené isentropiquement au repos, l'indice p les grandeurs relatives à la paroi et l'indice e les grandeurs relatives à la frontière extérieure de la couche limite. Dans le fluide à propriétés physiques constantes, la masse volumique et la viscosité sont égales à ρ_0 et μ_0; les autres grandeurs portent un astérisque.

2. Nous allons étudier dans quelles limites on peut passer d'un problème à l'autre en introduisant une transformation reliant les abscisses x et $x^\star$, les ordonnées y et $y^\star$ et les vitesses longitudinales u et $u^\star$.

Les formules de transformation sont une généralisation de la transformation de Howarth-Stewartson (1) à laquelle on se ramène lorsque le facteur

thermique pariétal $r=1$

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x^{\star} &= \int_0^{x} \frac{\theta_0 \mu_p}{\theta_p \mu_0} \left(\frac{\theta_e}{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}+1+\frac{r}{2}} dx,\\
y^{\star} &= \left(\frac{\theta_e}{\theta_0}\right)^{\frac{r}{2}} \int_0^{y} \frac{\rho}{\rho_0}\, dy,\\
u^{\star} &= \left(\frac{\theta_0}{\theta_e}\right)^{\frac{r}{2}} u.
\end{aligned}
\right.
$$

On a supposé, en outre, que la température dans la couche limite compressible a l'expression suivante

$$
(2)\qquad \theta = \theta_e + \frac{r u_e^2}{2 C_p} \frac{\partial f}{\partial y^{\star}}(x^{\star}, y^{\star}) \left[1 - g^2(x^{\star}, f(x^{\star}, y^{\star}))\right].
$$

La fonction g, égale au rapport $u/u_e = u^{\star}/u_e^{\star}$, est solution de l'équation de l'impulsion dans le cas d'une couche limite à propriétés physiques constantes et la fonction f est une fonction croissante de y satisfaisant aux conditions aux limites :

$$
f(x^{\star}, 0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x^{\star}}(x^{\star}, 0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(x^{\star}, \infty) = \infty.
$$

3. A partir des équations (1) on trouve aisément que l'épaisseur de quantité de mouvement

$$
\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy
$$

est reliée à l'épaisseur de quantité de mouvement $\delta_2^{\star}$ par

$$
(3)\qquad \delta_2 = \left(\frac{\theta_0}{\theta_e}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}+\frac{r}{2}} \delta_2^{\star}.
$$

De même l'épaisseur de déplacement,

$$
\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy
$$

est donnée, en fonction de $\delta_1^{\star}$ et $\delta_2^{\star}$, par

$$
(4)\qquad \delta_1 = \left(\frac{\theta_0}{\theta_e}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}+\frac{r}{2}} \left[\delta_1^{\star} + \frac{r(\gamma-1)}{2} M_e^2 (\delta_1^{\star} + \delta_2^{\star})\right].
$$

La tension de frottement à la paroi dans l'écoulement compressible

$$
\tau_p = \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p
$$

est reliée à la tension de frottement $\tau_p^{\star}$ par

$$
(5)\qquad \tau_p = \frac{\mu_p \theta_e}{\mu_0 \theta_p} \left(\frac{\theta_e}{\theta_0}\right)^{r+\frac{1}{\gamma-1}} \tau_p^{\star}.
$$

Dans le cas général, la relation globale de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\delta_2}{dx}+[\delta_2(2-M_e^2)+\delta_1]\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}=\frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2}. \tag{6}$$

En y remplaçant δ_2, δ_1 et τ_p par leurs expressions (3), (4) et (5), on arrive à la relation globale de la quantité de mouvement pour la couche limite à propriétés physiques constantes :

$$\frac{d\delta_2^*}{dx^*}+(2\delta_2^*+\delta_1^*)\frac{1}{u_e^*}\frac{du_e^*}{dx^*}=\frac{\tau_p^*}{\rho_0 u_e^{*2}} \tag{7}$$

et cela sans qu'il soit nécessaire de spécifier la forme de la fonction f.

4. On vérifie facilement que l'expression $u=u_e g(x^*, y^*)$ a sa dérivée seconde à la paroi qui satisfait à l'équation différentielle de l'impulsion. Par contre, la dérivée troisième à la paroi diffère de la valeur réelle d'une quantité très faible, égale à

$$\left[\frac{1}{\mu_p}\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_p-\frac{1}{\theta_p}\right]\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)_p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p.$$

L'expression (2) de la température a des dérivées première, seconde et troisième à la paroi qui satisfont à la condition $(\partial\theta/\partial y)_p=0$, à l'équation différentielle de l'énergie et à sa dérivée par rapport à y, pourvu que la fonction (x^*, y^*) se développe en puissances de y^* de la façon suivante :

$$f(x^*, y^*)=y^*+\frac{y^{*3}}{3}\left(1-\frac{\mathcal{P}}{r}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y^*}(x^*, 0)\right)^2$$
$$+\frac{y^{*4}}{12}\left[3\left(1-\frac{\mathcal{P}}{r}\right)+\frac{\mathcal{P}}{r}(1-r)\frac{\theta_e}{\theta_p}\right]\frac{\partial g}{\partial y^*}(x^*, 0)\frac{\partial^2 g}{\partial y^{*2}}(x^*, 0)+O(y^{*5}).$$

5. Il est intéressant de voir les résultats que donne la transformation précédente dans le cas de la plaque plane pour laquelle $u_e=$ Cte, ce qui entraîne $u_e^*=$ Cte. Le profil des vitesses est de la forme

$$\frac{u}{u_e}=\frac{u^*}{u_e^*}=g(x^*, y^*)=F'(\eta^*), \qquad \text{avec} \quad \eta^*=y^*\sqrt{\frac{u_e^*}{\nu_0 x^*}}.$$

$F(\eta^*)$ étant solution de l'équation différentielle $FF''+2F'''=0$.

Le coefficient de frottement local sera donné par l'expression

$$\frac{C_f}{C_{fi}}=\sqrt{\frac{\mu_p\theta_e}{\mu_e\theta_p}},$$

C_{fi} étant la valeur qu'aurait le coefficient si la loi établie pour un fluide incompressible était valable. L'expression du frottement est identique à celle de Chapman et Rubesin ([2]), bien qu'on n'ait fait aucune hypothèse sur la loi de viscosité.

(*) Séance du 6 janvier 1958.

([1]) Howarth, *Proc. Roy. Soc. London*, A 196, 1948, p. 16-42; Stewartson, *Proc. Roy. Soc. London*, A 200, 1949, p. 84-100.

([2]) Chapman et Rubesin, *J. Aero. Sc.*, 16, n° 9, 1949.

AÉRODYNAMIQUE. — *Effet d'épaisseur, en régime supersonique, pour certaines ailes en flèche effilées. Traînée d'onde minimum.* Note de M. **Maurice Fenain** et Mlle **Denise Vallée**, transmise par M. Maurice Roy.

L'application de la théorie linéaire des mouvements homogènes à l'étude de certaines ailes en supersonique, permet, selon une formulation déjà introduite (1), de calculer les effets d'épaisseur, et de déterminer des solutions optimum.

Considérons, dans un système $Ox_1x_2x_3$, des ailes voisines de Ox_1x_2, symétriques par rapport à Ox_1x_3 et Ox_1x_2, de corde médiane c, se déplaçant suivant les $x_1 < 0$, à un Mach $M > 1$. La demi-aile ($x_2 > 0$) est de forme en plan triangulaire, le bord d'attaque (subsonique ou supersonique) et le bord de fuite (supersonique) faisant avec Ox_1 les angles γ et ω.

Posons

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}, \qquad \beta\,\mathrm{tg}\,\omega = h, \qquad \beta\,\mathrm{tg}\,\gamma = \beta\tau = k = hl = h(1 - m) \qquad (|h| > 1)$$

et donnons-nous sur l'aile, en problème direct (PD), la pente en direction de l'écoulement ϖ et en problème inverse (PI), la composante axiale de la vitesse de perturbation u, liée au coefficient de pression par $C_p = -2u$, sous la forme

$$\pm\varpi = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{m}{c}\right)^{n-1} \varpi_n \qquad \text{ou} \qquad u = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{m}{c}\right)^{n-1} u_n,$$

avec

$$\left.\begin{matrix} \varpi_n \\ \dfrac{u_n}{\tau} \end{matrix}\right\} = \sum_{q=0}^{n-1} a_{n-1-q,\,q}\, x_1^{n-1-q} \frac{|x_2|^q}{\tau^q}.$$

Alors u ou ϖ est donné par

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{u}{\tau} \\ \varpi \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{m x_1}{c}\right)^{n-1} \sum_{p=1}^{n} A_{np}(k)\, F_{np}(x, k), \qquad x = \frac{\beta x_2}{x_1}.$$

En PD, où la solution est unique, on a $F_{np} = K_{np}$ et $A_{np} = \Lambda_{np}$, les K_{np} et Λ_{np} ayant été définis en (2). Dans ce cas, ϖ étant fini au bord d'attaque, on peut étudier des profils pointus.

En PI, il existe, quand $k < 1$, deux solutions indépendantes acceptables, qu'on peut combiner linéairement pour obtenir une solution dépendant d'un paramètre arbitraire par degré d'homogénéité. Cette indétermination — qui disparaît pour $k \geq 1$, le potentiel de perturbation φ devant être nul au bord d'attaque — s'explique par le fait que $\varphi = \varphi_n$, homogène de degré n, n'est connu qu'à un terme x_2^n près quand u_n est fixé. On a donc, dans ce cas, $F_{np} = H_{np}$ ou $\hat{H}_{np}$ et $A_{np} = \nu_{np}$ ou $\hat{\nu}_{np}$. Aux H_{np}, donnés en (3), et $\hat{H}_{np}$ correspondent

respectivement des solutions qui permettent d'obtenir pour $k < 1$ des bords d'attaque arrondis et des bords d'attaque à rebroussement. Dans les applications présentes, nous n'avons pas considéré cette dernière solution. Les ν_{np} (ainsi que les $\hat{\nu}_{np}$) vérifient des relations analogues à celles qui définissent les l_{np} de [1] et s'expriment, cette fois encore, à l'aide des intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèces de module $k' = (1 - k^2)^{1/2}$.

La surface extérieure des ailes étudiées s'exprime, à l'extrados, par

$$\frac{mx_3^+}{c} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{mx_1}{c}\right)^n \mathrm{T}_n(x, k) \qquad (x_3^+ > 0),$$

avec

$$\mathrm{T}_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{q=0}^{n-1} \frac{a_{n-1-q,q}}{n-q}\left[\left(\frac{x}{k}\right)^q - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right] & (\text{P. D.}), \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{2}{\pi} \nu_{np} \mathrm{H}_{n+1,p} & (\text{P. I.}). \end{cases}$$

La condition de fermeture des profils conduit à lier les $a_{n-1-q,q}$ par des relations linéaires.

En PD, ces relations, au nombre de N, sont

$$\sum_{n=p}^{N} (-1)^n \left(\frac{m}{l}\right)^n \sum_{s=1}^{p} l^s \mathrm{C}_{n-s}^{n-p} \sum_{q=0}^{n-s} \frac{a_{n-1-q,q}}{n-q} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}).$$

En PI, dans le cas des ailes en queue d'hirondelle, on ne sait écrire la condition de fermeture sans l'écrire sur le prolongement du bord de fuite sur l'aile, ce qui conduit à des géométries inacceptables ($x_3^+ < 0$). On ne peut donc envisager que des ailes à bord de fuite non rentrant ($l \leq 0$), ce qui est le cas des ailes Δ que nous considérons ici.

Les H_{np} étant connus, les conditions de fermeture lient les ν_{np} donc les $a_{n-1-q,q}$.

On note [1]

$$\mathcal{F}^{(q,q-r)} = \frac{1}{k}\int_0^k \left(\frac{x}{k}\right)^r \left(\frac{h}{h-x}\right)^q \mathrm{F}(x)\,dx, \qquad \mathcal{F}^{(q,q)} = \mathcal{F}^{(q)}.$$

Le coefficient de traînée d'onde c_x est donné par

$$\begin{aligned} \frac{c_x}{\tau} = {} & \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=0}^{n-1} a_{n-1-q,q}^2 \mathfrak{X}_{n-1-q,q;n-1-q,q} \\ & + \sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{n-1}\sum_{q'=0}^{n-1} a_{n-1-q,q}\, a_{n-1-q',q'}\, \mathfrak{X}_{n-1-q,q;n-1-q',q'} \\ & + \sum_{n=2}^{N}\sum_{n'=1}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{q'=0}^{n'-1} a_{n-1-q,q}\, a_{n'-1-q',q'}\, \mathfrak{X}_{n-1-q,q;n'-1-q',q'}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathfrak{X}_{ij;i'j'} = \overline{\mathfrak{X}}_{ij;i'j'} + \mathfrak{X}^{*}_{ij;i'j'},$$

le terme $\mathfrak{X}^{*}_{ij;i'j'}$, dû à la singularité de bord d'attaque, étant nul quand celui-ci n'est pas arrondi. Les $\overline{\mathfrak{X}}_{ij;i'j'}$ ont des expressions analogues à celles données en [1], ainsi d'ailleurs que les $\mathfrak{X}^{*}_{ij;i'j'}$; toutefois, ceux-ci tendent vers l'infini quand $k \to 1$.

Pour chacun de ces problèmes, la formulation se prête bien à la recherche d'un minimum de traînée, compte tenu de certaines conditions. En particulier, on peut s'imposer le volume V de l'aile, donné par

$$\frac{m\mathrm{V}}{\tau c^3} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sum_{q=0}^{n-1} a_{n-1-q,q} \mathrm{V}_{n-1-q,q} \quad \text{(P. D.)},$$

$$\frac{m\mathrm{V}}{\tau c^3} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sum_{p=1}^{n} \frac{8}{\pi} m^n \nu_{np} \mathcal{H}^{(n+3)}_{n+2,p} \quad \text{(P. I.)},$$

où les $\mathrm{V}_{n-1-q,q}$ comme les $\mathcal{H}^{(n+3)}_{n+2,p}$ ne dépendent que de l et sont connus à l'avance.

Dans le cas de l'aile en delta ($l = 0$, $m = 1$), en PI

$$\frac{\mathrm{V}}{\tau c^3} - 4\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\nu_{n1}}{(n+2)!}.$$

Des applications numériques ont été faites en PD pour $l = 0$, $k = 1$, $\mathrm{N} = 2, 3, 4, 5$ et en PI pour $l = 0$, $k = 0{,}7$, $\mathrm{N} = 2, 3, 4, 5$ en liant plus particulièrement dans ce cas, les $a_{n-1-q,q}$ de manière que les sections perpendiculaires à l'écoulement soient des ellipses. Pour les ailes ainsi adaptées, les gains de C_x par rapport au C_x de l'aile à profils paraboliques homothétiques [4] de même forme en plan et de même volume, varient avec N de 22 à 29 % en PD. En PI, du fait de la restriction géométrique, les gains que nous avons obtenus sont un peu moins importants, mais toujours supérieurs à 15 %.

L'épaisseur de ces ailes, en extrémité d'envergure, tend à diminuer notablement quand N augmente. En PD, elle devient même pratiquement nulle et nous ne sommes pas assurés pour $\mathrm{N} = 5$ et à la précision de nos calculs que x_3^+ ne soit pas négatif en certains points.

(1) M. Fenain et D. Vallée, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1138.
(2) M. Fenain et D. Vallée, *Rech. Aéron.*, n° 44, 1955.
(3) M. Fenain et D. Vallée, *Rech. Aéron.*, n° 50, 1956.
(4) M. Fenain, *Rech. Aéron.*, n° 16, 1950.

AÉROTHERMIQUE. — *Étude expérimentale de la diffusivité thermique de l'air en écoulement turbulent dans un tuyau.* Note (*) de M. **Jean Gosse**, présentée par M. Gustave Ribaud.

Cette Note résume les résultats des mesures de la répartition dans une section droite, de la diffusivité thermique turbulente et de la viscosité cinématique turbulente de l'air en écoulement dans un tuyau circulaire.

Dans notre montage expérimental, un ventilateur aspire l'air à température ordinaire dans un tuyau de 20 cm de diamètre et de 13 m de longueur. Des prises de pression disposées régulièrement le long du tuyau permettent de vérifier, d'une part, que l'écoulement est établi bien avant la section où sont faites les mesures et, d'autre part, que le tuyau utilisé peut être considéré comme *aérodynamiquement lisse.* La distance de l'entrée du tuyau à la section droite de mesure est égale à 55 diamètres. Les nombres de Reynolds, $R = u_0 d/\nu$, calculés à partir de la vitesse sur l'axe u_0, du diamètre du tuyau d et de la viscosité cinématique moléculaire ν, sont compris entre 10 000 et 65 000.

1. *Mesures thermiques.* — La diffusivité thermique est mesurée à l'aide d'un montage qui dérive de celui utilisé par Schubauer (1) pour l'étude des écoulements turbulents isotropes. Un fil chauffé électriquement est placé perpendiculairement au vent. Un thermocouple situé en aval se déplace d'un mouvement lent et continu en restant parallèle au fil et à distance constante. La courbe de répartition des températures dans le sillage thermique est obtenue directement à l'aide d'un potentiomètre enregistreur connecté au thermocouple. La valeur de la diffusivité thermique de l'air turbulent est obtenue de deux façons différentes à partir de la courbe de répartition des températures (courbes de Gauss) : d'une part, par lecture des ordonnées et, d'autre part, par la connaissance de l'ordonnée maximum et de la quantité de chaleur perdue par le fil, chaleur qui se conserve au cours de la diffusion. Ces deux méthodes de dépouillement utilisées concurremment permettent d'obtenir, avec plus de précision, la valeur de la diffusivité thermique près de la paroi du tube, c'est-à-dire dans une région où le gradient de vitesse déforme la courbe des températures. Le fil chaud est choisi de telle sorte qu'il n'introduise dans l'écoulement aucune turbulence parasite (dans toutes nos mesures le nombre de Reynolds relatif au fil est inférieur à 6).

La figure 1 donne les résultats de nos mesures pour trois valeurs du nombre de Reynolds. La diffusivité thermique D' de l'air est évaluée en unités C. G. S. Nous avons porté en abscisse les valeurs du rapport y/r de la distance fil-axe au rayon du tuyau. Les trois courbes présentent une forme analogue avec un maximum assez accusé pour y/r égal à 0,85.

On peut dire que les courbes sont facilement extrapolables jusqu'à la paroi ($y/r = 1$) et que la valeur de D′ y correspond à la diffusivité thermique moléculaire (laminaire).

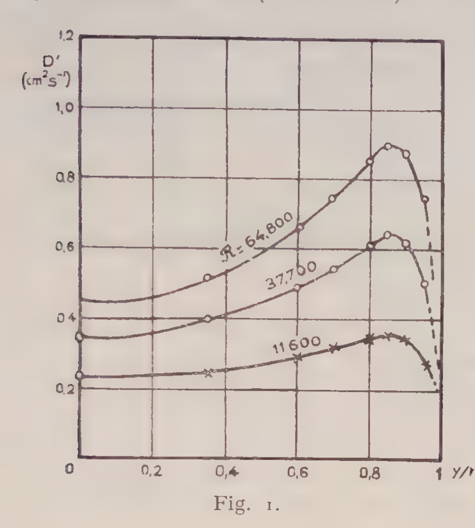


Fig. 1.

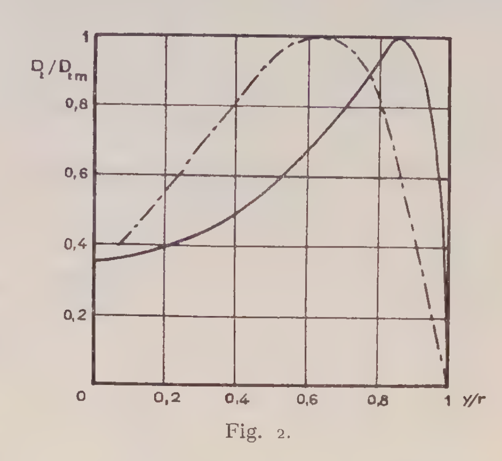


Fig. 2.

Si nous désignons par D_t la diffusivité par turbulence seule, c'est-à-dire la valeur de la diffusivité D′ mesurée dont on a retranché la diffusivité moléculaire, on remarque qu'il est possible de représenter par une courbe unique les résultats correspondant aux différents nombres de Reynolds. La figure 2 représente en trait plein la courbe réduite de variation de la diffusivité thermique par turbulence D_t rapportée à la valeur maximum D_{tm} correspondant à $y/r = 0{,}85$. Nous avons tracé, en trait mixte, une courbe obtenue selon une méthode toute différente par Isakoff et Drew (²) dans le cas d'un écoulement turbulent de mercure. Les deux courbes présentent la même allure générale. L'existence d'une courbe réduite unique justifie la définition précédente de la diffusivité par turbulence D_t à partir de la diffusivité moléculaire et de la diffusivité mesurée D′.

2. *Mesures dynamiques.* — Parallèlement aux mesures thermiques nous avons effectué la mesure directe du gradient de vitesse dans une section droite, ceci pour les deux valeurs les plus élevées du nombre de Reynolds : 37 700 et 64 800. Le gradient de vitesse est déterminé en utilisant deux tubes de prise de pression d'arrêt disposés parallèlement à distance connue. Il a été vérifié auparavant que la pression statique était constante dans la section droite de mesure. La figure 3 donne la variation du gradient $[d(u/u_0)/d(y/r)]$ en fonction de y/r. La précision des mesures ne permet pas de tracer deux courbes distinctes pour la région centrale du tuyau, mais le gradient varie extrêmement vite au-delà de $y/r = 0{,}9$ et les courbes aboutissent pour $y/r = 1$ (paroi) aux valeurs 36,7 et 47 pour R = 37 700 et 64 800.

Si nous admettons que la turbulence du fluide se manifeste par un effet de viscosité s'ajoutant simplement à la viscosité moléculaire, on peut définir une viscosité cinématique par turbulence ν_t — homologue de la diffusivité thermique par turbulence D_t — telle que l'équilibre des forces de viscosité et de pression s'exprime par l'équation

$$(\nu + \nu_t)\,\frac{d\dfrac{u}{u_0}}{d\dfrac{y}{r}} = \frac{1}{2}\left(\frac{ar^2}{\rho u_0}\right)\frac{y}{r}$$

dans laquelle a désigne la perte de charge et ρ la masse spécifique de l'air.

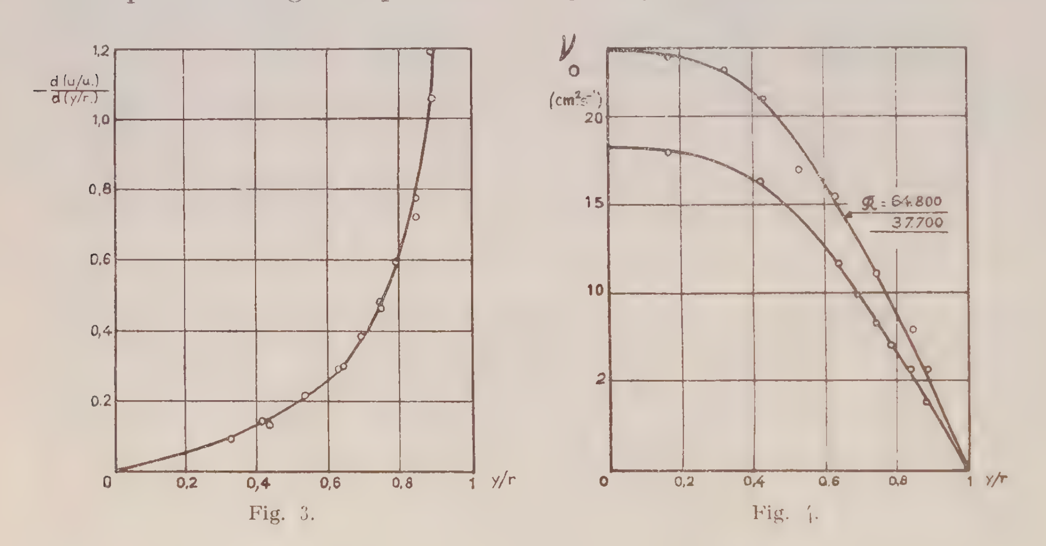


Fig. 3. Fig. 4.

La figure 3 donne la variation de $[d(u/u_0)/d(y/r)]$ en fonction de y/r, et une mesure directe détermine la valeur de la perte de charge a. La figure 4 représente la variation de la viscosité cinématique par turbulence en fonction de y/r. ν_t, qui est maximum sur l'axe du tuyau, décroît régulièrement lorsque la distance à l'axe augmente et s'annule sur la paroi

(*) Séance du 13 janvier 1958.

(1) Schubauer, *Rapport* N. A. C. A., 524, 1935.

(2) Isakoff et Drew, *General Discussion on Heat Transfer*, 1955, p. 405.

HYDRAULIQUE. — *Stabilité de deux cheminées d'équilibre couplées sans pertes d'insertion.* Note (*) de M. Lefteri Sideriades, présentée par M. Louis de Broglie.

En utilisant un raisonnement développé dans une précédente Note (1), il est possible, moyennant certaines hypothèses supplémentaires résultant du couplage, d'étudier le problème d'une usine fonctionnant avec deux instal-

lations hydrauliques distinctes en parallèle. Les conditions de stabilité s'expriment sous forme d'un régionnement simple dans le plan des inverses des sections des cheminées.

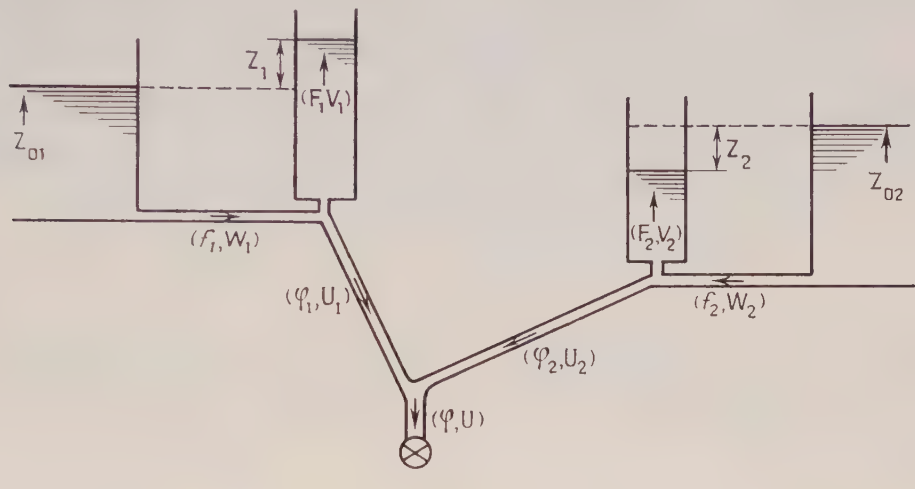


Fig. 1.

1. *Position du problème.* — Le schéma de l'installation étudiée est représenté sur la figure 1. Les équations générales du système sont les suivantes :

(1) $$f_i \mathrm{W}_i = \mathrm{F}_j \mathrm{V}_i + \varphi_i \mathrm{U}_i,$$

(2) $$\frac{\mathrm{L}_i}{g} \dot{\mathrm{W}}_i + h_i = 0,$$

(3) $$h_i = \mathrm{Z}_i + \mathrm{P}'_{0i} \mathrm{W}_i^2 + \psi_i(\mathrm{V}_i),$$

(4) $$\mathrm{V}_i = \dot{\mathrm{Z}}_i,$$

(5) $$\varphi \mathrm{U} = \sum \varphi_i \mathrm{U}_i,$$

(6) $$\mathrm{U} \sum (\varphi_i \mathrm{U}_i) = \sum \varphi_i \mathrm{U}_i^2,$$

(7) $$\sum \varphi_i \mathrm{U}_i (h_i + \mathrm{Z}_{0i}) = \mathrm{K}.$$

L'équation (6) résulte d'une application du théorème de Borda au circuit dérivé formé par les conduites forcées avec hypothèse de pertes de charges minima; cette hypothèse permet de traduire la puissance effective totale par l'équation (7).

2. *Résolution.* — On suppose, dans cette étude, qu'il n'y a pas de pertes d'insertion ($\psi = 0$). Il est alors commode de résoudre le système par rapport aux vitesses W dans les galeries d'amenée. En posant

$$x = \mathrm{W}_1; \qquad u = \dot{\mathrm{W}}_1; \qquad \mathrm{W} = \mathrm{Z}_{01} - \frac{\mathrm{L}_1}{g} u + \lambda \left(\mathrm{Z}_{02} - \frac{\mathrm{L}_2}{g} v \right);$$

$$y = \mathrm{W}_2; \qquad v = \dot{\mathrm{W}}_2; \qquad \lambda = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \pm \sqrt{\Delta}}{\varphi_2(\varphi - \varphi_1)} \qquad \text{avec} \quad \Delta \equiv \varphi_1 \varphi_2 \varphi (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi);$$

on obtient le système différentiel

$$(8)\qquad \frac{dx}{uW} = \frac{dy}{vW} = \frac{F_1 L_1}{g}\,\frac{du}{K - W(f_1 x + 2P'_{01} F_1 u x)}$$
$$= \frac{\lambda F_2 L_2}{g}\,\frac{dv}{K - \lambda W(f_2 y + 2P'_{02} F_2 v y)} = \frac{dt}{W}.$$

L'étude topologique dans l'hyperespace (x, y, u, v) met en évidence l'existence de deux points singuliers (deux valeurs de λ) correspondant aux deux positions d'équilibre stable du système de coordonnées :

$$u = v = 0 \begin{cases} x = K(f_1 Z_0^*)^{-1} \\ y = K(\lambda f_2 Z_0^*)^{-1} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad Z_0^* = Z_{01} + \lambda Z_{02}.$$

L'équation aux valeurs propres d'un tel système étant du quatrième degré, les conditions de Hurwitz déterminant la stabilité totale (au nombre de six) sont relativement aisées à traduire dans le plan des inverses des sections des cheminées $(1/F_1, 1/F_2)$.

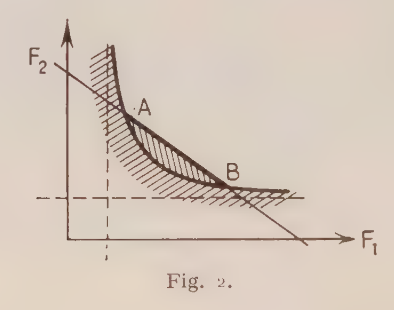


Fig. 2.

3. *Résultats.* — Dans un tel plan, le système est totalement stable si les $1/F_i$ sont intérieurs au contour d'un pentagone curviligne correspondant à la valeur optimum de λ. La transformation faisant passer au plan des F_i fait apparaître les solutions possibles (valeurs minima des F_i) comme étant sur le segment AB, déterminé par l'hyperbole équilatère

$$(9)\qquad 2gZ_0^*\left(\frac{P'_{01}}{L_1 f_1} + \frac{P'_{02}}{\lambda L_2 f_2}\right)F_1 F_2 = F_1 + F_2$$

sur la droite

$$(10)\qquad 2gZ_0^*\left(\frac{f_2}{f_1}P'_{01}F_1 + \frac{f_1}{\lambda f_2}P'_{02}F_2\right) = f_2 L_1 + f_1 L_2 \quad (\textit{fig. } 2).$$

La stabilité est d'autant plus faible (valeurs des F_i maxima) que φ est plus faible. Elle est maxima pour $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. La relation donnant les F_i minima devient alors

$$\sum \frac{P_{0i}}{W_{0i}^2 f_i^2}\varphi_i F_i = \sum \frac{L_i}{f_i}\,\frac{1}{2g\sum\left(\frac{Z_{0i}}{\varphi_i}\right)}.$$

En posant

$$\sum \frac{P_{0i}}{W_{0i}^2 f_i^2} \varphi_i F_i = \frac{P_0^\star \varphi^\star F^\star}{W_0^{\star 2} f^{\star 2}}; \qquad \sum \frac{L_i}{f_i} = \frac{L^\star}{f^\star}; \qquad \sum \frac{Z_{0i}}{\varphi_i} = \frac{Z_0^\star}{\varphi^\star},$$

on retrouve la forme de la condition de Thoma

$$F^\star = \frac{W_0^{\star 2} L^\star f^\star}{2 g P_0^\star Z_0^\star}.$$

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) L. Sideriades, *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 1884.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Sur la détermination des caractéristiques non linéaires d'une éprouvette en « rhodoïd » par la méthode de l'excitation harmonique.* Note (*) de M. **Charles Hervé**, présentée par M. Joseph Pérès.

Le but de cette Note est de décrire un appareillage destiné à l'étude de vibrations forcées non linéaires, et, de montrer comment les lois reliant la raideur et l'amortissement interne d'une éprouvette à l'amplitude de ses vibrations peuvent se déduire des courbes expérimentales.

Le principe de l'appareil est le suivant : un disque d'assez grande inertie est mobile autour de son axe, et relié à une extrémité de l'éprouvette à étudier qui travaille en torsion. L'autre extrémité de l'éprouvette est animée d'un mouvement sinusoïdal imposé. En faisant varier la pulsation de ce mouvement imposé, et en traçant les variations de l'admittance en module et en phase, on obtient des « courbes de résonance » légèrement différentes des courbes classiques, mais qui, dans le cas linéaire, sont, comme elles, indépendantes de l'amplitude de l'excitation. Le fait qu'elles en dépendent (pour une éprouvette de rhodoïd, par exemple) indique la présence de caractéristiques non linéaires.

Notations utilisées :

I, moment d'inertie du disque, déterminé en remplaçant l'éprouvette étudiée par un ressort linéaire;

θ, angle d'un rayon fixe du disque avec la verticale (à l'équilibre $\theta = 0$);

$\theta_i = \alpha \cos \omega t$, mouvement sinusoïdal imposé;

A, amplitude de θ; elle est lue directement;

U, amplitude de $u = \theta - \theta_i$;

φ, phase du disque par rapport à l'excitation. Elle est mesurée à l'aide d'un système optique : au passage par la position d'équilibre, une fente, percée sur le disque, est éclairée par une lampe; le faisceau lumineux ainsi obtenu, après avoir traversé un polaroïd entraîné par l'excitation, est éteint avec un analyseur dont la position donne directement la phase (après un réglage préalable du zéro);

b, amortissement interne de l'éprouvette ;

c, coefficient de raideur de l'éprouvette (torsion).

L'enregistrement du mouvement, en régime permanent, donne une courbe d'allure sinusoïdale, de fréquence ω, sans présence apparente d'harmoniques. Nous pouvons donc essayer un moule mathématique donnant une telle réponse, c'est-à-dire de la forme

$$I\theta'' + b(\omega, U)(\theta' - \theta'_i) + c(\omega, U)(\theta - \theta_i) = 0,$$

où b et c, fonctions de U et de ω, sont des consantes en régime permanent.

A partir de ce moule et des courbes expérimentales, nous déterminerons les valeurs de b et c par la méthode globale.

Un calcul simple donne

$$c = \frac{I\omega^2}{2}\left[1 + \frac{A^2 - \alpha^2}{A^2 + \alpha^2 - 2\alpha A \cos\varphi}\right],$$

formule permettant d'avoir la valeur de c en chaque point ω.

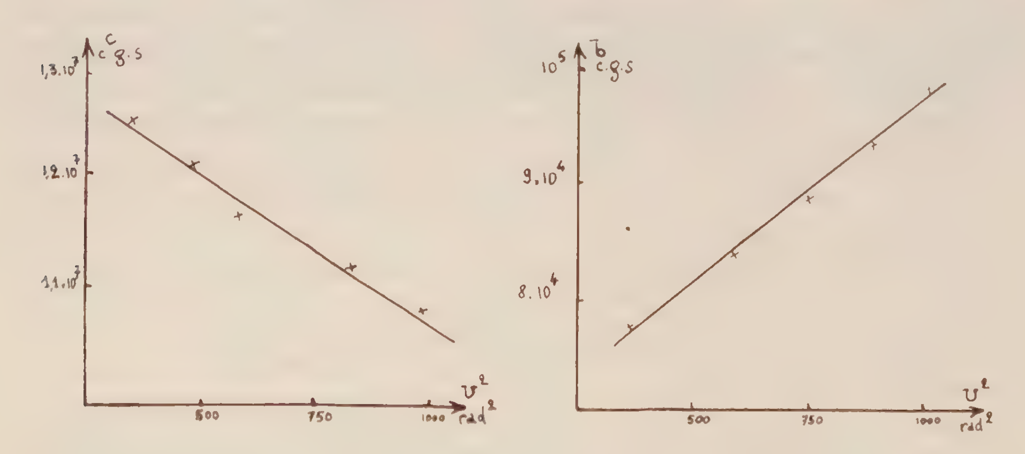
Pour b, le même calcul conduirait à une formule difficilement exploitable en chaque point. Mais, si l'on se place systématiquement à la résonance de phase, obtenue pour

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^2}{Ic - b^2}},$$

il vient

$$b = \frac{I\alpha\omega_0}{A}.$$

Travaillons dans un domaine où ω varie peu : nous pourrons alors supposer que b et c ne dépendent que de U et chercher les lois de variation.



On voit qu'aux erreurs d'expérience près, les courbes représentatives de b et c en fonction de U^2 peuvent être assimilées à des droites. Nous avons trouvé pour l'éprouvette étudiée :

$$b = b_0(1 + \mu U^2), \qquad c = c_0(1 - \lambda U^2),$$

avec $\mu = 1,6$ et $\lambda = 0,6$ lorsque b et c sont exprimés en C. G. S. et U en radians.

Il est bien connu qu'une nonlinéarité de c, de la forme ci-dessus, a pour effet de faire apparaître des discontinuités (sauts) pour une valeur suffisante de α [1]. La non-linéarité de b agit, au contraire, en sens inverse : elle tend à diminuer l'importance des discontinuités et à élargir la bande passante.

R. Mazet [2] montre que, dans les mêmes conditions d'expérience, les lois trouvées pour b et c en fonction de U, sont équivalentes aux suivantes :

$$b = b_0(1 + 4\mu u^2), \qquad c = c_0\left(1 - \frac{4}{3}\lambda u^2\right),$$

où u représente l'élongation relative.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) J.-J. Stocker, *Non linear Vibrations*, *Interscience publishers*, Inc., New-York.

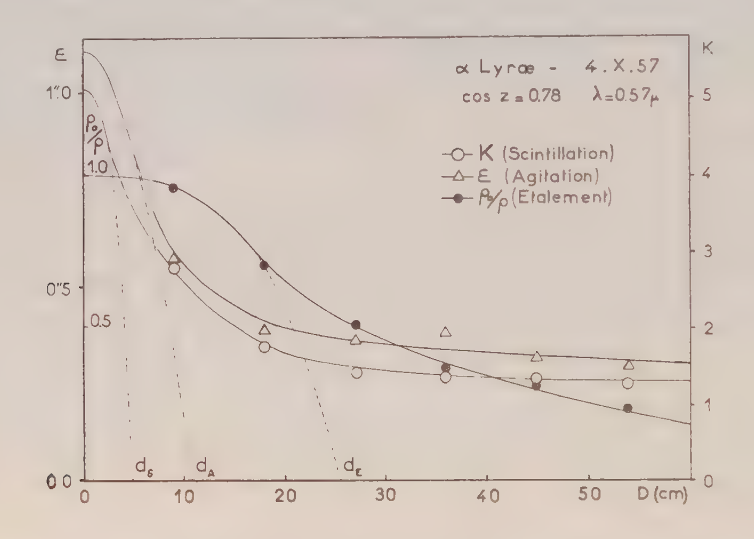
(2) R. Mazet, Extrait du *Colloque International des vibrations non linéaires*, Ile de Porquerolles, 1951. *Publ. scient. et techn. Min. Air*, n° 281.

ASTRONOMIE. — *Étude expérimentale des défauts de l'image d'une étoile en fonction du diamètre de l'objectif utilisé.* Note de M. **Jean Rösch**, présentée par M. André Danjon.

La présente Note donne un exemple de vérification des formules [1] fournissant des expressions approchées de la scintillation, de l'agitation et de l'étalement de l'image d'une étoile, en fonction du diamètre de l'objectif utilisé.

Le dispositif utilisé est celui déjà décrit [2], sauf quelques améliorations : le mouvement de balayage de l'image, donné par une came entraînée par un moteur synchrone, est uniforme d'un bout à l'autre de la course, avec retour instantané au point de départ; on s'est surtout attaché à éliminer les causes parasites d'étalement, en limitant étroitement le domaine spectral utilisé autour du minimum focal de l'objectif et en contrôlant fréquemment la mise au point en cours d'expérience par la méthode de Foucault. Les photographies de l'oscillographe cathodique sont projetées très agrandies sur une feuille de papier sur laquelle on trace les contours du diagramme, d'où l'on déduit facilement les valeurs de la scintillation, de l'agitation et de l'étalement. La durée d'un balayage étant voisine de 4 s, on obtient plusieurs dizaines de pointés pour chaque diaphragme d'une série de six, en un temps de l'ordre de 10 à 20 m pendant lequel on peut espérer que les conditions atmosphériques ont peu changé. Par contre, dans ces conditions, la phase de croissance du flux durant moins d'une seconde, l'élargissement du diagramme par l'*agitation* est insuffi-

samment moyenné, donc difficile à évaluer. L'*étalement* (pente maximum du diagramme) est également affecté par la rapidité du balayage, mais à un degré moins gênant. La mesure de la *scintillation* ne présente, elle, aucune difficulté. L'expérience montre, en tous cas, que des mesures sur trois séries d'une dizaine de tracés, séparées par le temps nécessaire à l'obtention des séries correspondant à d'autres diaphragmes, fournissent des valeurs tout à fait cohérentes.



La figure ci-dessus, qui se rapporte aux observations du 4 octobre 1957, montre que les points expérimentaux se placent très bien sur des courbes ayant l'allure prévue par la théorie [1], sauf la réserve déjà signalée pour l'étalement aux grands diamètres.

La courbe d'étalement (ρ_0/ρ) permet de tracer avec assez de précision la biquadratique à laquelle elle est assimilable pour les petits diamètres, qui coupe l'axe $\rho_0/\rho = 0$ au point d'abscisse $d_E = 25$ cm.

Les courbes de scintillation (K) et d'agitation (ε) sont beaucoup moins bien définies dans la région des petits diamètres, car l'expérience montre que même pour une ouverture de 9 cm, elles ne présentent encore aucune tendance à l'inflexion. Il serait donc utile de pousser les mesures jusqu'à des diamètres nettement plus petits, pour lesquels les problèmes de sensibilité du récepteur commencent à intervenir. Mais les courbes obtenues fixent au moins des limites inférieures aux ordonnées à l'origine : le rapport entre le flux maximum reçu et le flux minimum, $K_0 = 5{,}0$; l'agitation $\varepsilon_0 = 1'',1$. Ces valeurs minimum étant déjà élevées, nous les retiendrons pour les calculs ultérieurs. Les courbes expérimentales imposent du même coup les abscisses des points d'ordonnée nulle des paraboles qui leur sont osculatrices pour les petits diamètres, $d_s = 5$ cm pour la scintillation, $d_A = 10$ cm pour l'agitation.

L'application des formules théoriques fournit alors la longueur d'onde des perturbations, $\Lambda = 30$ cm, leur altitude au-dessus de la station, $H = 2\,200$ m, et l'amplitude de la différence de marche $\Delta = 0{,}18\ \mu$.

On ne saurait voir dans ces résultats la preuve de la possibilité de localiser et de décrire par ce procédé et dans un but météorologique la turbulence atmosphérique. Mais le fait que trois courbes indépendantes, fournissant cinq paramètres, puissent, dans les limites d'incertitude ci-dessus, s'interpréter par les valeurs numériques de trois quantités physiques seulement, *chacune de l'ordre de grandeur auquel on peut s'attendre*, plaide appréciablement en faveur de la forme des expressions trouvées par la théorie.

Trois particularités des courbes obtenues méritent d'être signalées :

a. Les valeurs très élevées de la scintillation pour les objectifs de moins de 10 cm alors même que la longueur d'onde moyenne des perturbations est de 30 cm;

b. De même, les valeurs élevées de l'agitation dans ce même domaine de diamètres, qui se trouve être celui de la plupart des instruments de géodésie;

c. Par contre, la décroissance très lente, au début, du rapport diamètre théorique/diamètre réel de l'image, prévu par la théorie et retrouvé par l'observation. Cette propriété est essentielle dans l'élaboration d'une méthode de sélection des images les mieux définies.

(1) *Comptes rendus*, **246**, 1958, p. 384.
(2) *Comptes rendus*, **244**, 1957, p. 3027.

RELATIVITÉ. — *L'effet gravitationnel de spin*. Note (*) de M. **Olivier Costa de Beauregard**, présentée par M. Louis de Broglie.

Montrons que les résultats récemment établis par une voie inductive (1) se retrouvent dans une théorie générale.

1. Lorsqu'un morceau de matière passe d'un état sans densité de spin à un état avec densité de spin (c'est le cas par exemple d'un morceau de fer qu'on aimante) il acquiert de ce fait une densité d'impulsion transversale (2) $(i, j, k, l = 1, 2, 3, 4)$

$$m^{ij} = T^{ij} - T^{ji} = -\frac{ic}{2}\varepsilon^{ijkl}[\partial_k\sigma_l - \partial_l\sigma_k]. \tag{1}$$

Comme, en vertu de (1_2), la divergence $\partial_j m^{ij}$ est identiquement nulle, la variation de l'impulsion-énergie transversale entre deux états curvilignes du genre espace $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ est donnée par la formule (3)

$$P^i_{(2)} - P^i_{(1)} \equiv \iiint_{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1} m^{ij}\,\partial u_j = \iiint_{\mathfrak{T}} m^{ij}\,\partial u_j, \tag{2}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'hyperparoi du genre temps engendrée par le contour du morceau de matière suivi dans son mouvement, et $\delta u_i \equiv [dx_j\, dx_k\, dx_l]$: *ic* le quadrivecteur élément de volume sur $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{P}$.

Compte tenu de (1_2), l'expression de l'impulsion-énergie transversale se transforme en intégrale double étendue au contour du morceau de matière, suivant

$$(3)\qquad P^i = -\frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{E}} [\partial_k\sigma_l - \partial_l\sigma_k][dx^i\, dx^k\, dx^l] = \iint \sigma_k [dx^i\, dx^k],$$

ce qui est l'expression covariante de la formule (5) de notre précédente Note ([1]).

2. *La notion d'une impulsion-énergie transversale semble impliquée dans l'usage même d'une métrique asymétrique.* Soit g_{ij}, g^{ij}, $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ une métrique asymétrique, et posons comme d'habitude

$$(4)\qquad g_{ij} = g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}}, \qquad g^{ij} = g^{\underline{ij}} + g^{\overset{ij}{\vee}}.$$

Il est communément admis que, si l'espace-temps mathématique est décrit par une métrique asymétrique, l'espace-temps physique sera, lui, toujours décrit par une métrique symétrique. Or, à *un* vecteur

$$(5)\qquad V_i = g_{ij}V^j \qquad ou \qquad V^i = g^{ij}V_j$$

de la métrique asymétrique correspondent *deux* vecteurs de la métrique symétrique $g^{\underline{ij}}$, $h_{\underline{ij}}$, $g^{\underline{ij}}h_{\underline{jk}} = \delta^i_k$ considérée comme représentative de l'espace-temps physique ([4]), ([5]), savoir

$$(6)\qquad A_i = V_i, \qquad A^i = g^{\underline{ij}}V_j; \qquad B^i = V^i, \qquad B_i = h_{\underline{ij}}V^j.$$

Ceci suggère fortement que, dans le champ asymétrique créé par une grosse masse grave douée de spin, *l'impulsion-énergie et la quadrivitesse physiquement observables (dans la métrique symétrique) seront obliques l'une sur l'autre.* Si, alors, nous introduisons le quadrivecteur W_i tel que

$$(7)\qquad W_i = g_{\underset{\vee}{ij}}V^j, \qquad W^i = g^{\overset{ij}{\vee}}V_j,$$

la partie antisymétrique du potentiel de gravitation sera *physiquement* représentée par $g^{\overset{ij}{\vee}}$, $f_{\underset{\vee}{kl}} \equiv g^{\overset{ij}{\vee}}h_{\underline{ik}}h_{\underline{jl}}$.

3. Avec D. W. Sciama ([5]) admettons que l'équation d'Einstein généralisée décrivant les phénomènes gravitationnels incluant les effets de spin s'écrit, avec $P \equiv g^{ij}P_{ij}$, $\Theta \equiv g^{ij}\Theta_{ij}$, et les trois termes étant asymétriques,

$$(8)\qquad P_{ij} - \frac{P}{2}g_{ij} = \chi\Theta_{ij}, \qquad P = -\chi\Theta.$$

Comme en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger, Sciama ([5]) passe du système g_{jk}, P_{jk}, $\Gamma^i_{jk}\big(\Gamma_i \equiv \Gamma^i_{\underset{\vee}{ij}} \neq 0\big)$ au système g_{jk}, R_{jk}, $L^i_{jk}\big(L_i \equiv L^i_{\underset{\vee}{ij}} = 0\big)$.

Si nous *postulons* que la forme des (8) reste alors invariante, les quatre identités de conservation bien connues [6] *exigent* que le second membre de (8_1) soit transformé suivant

$$(9)\qquad \chi T_{ij} = \chi \Theta_{ij} + \frac{2}{3}[\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i] - \frac{1}{3}[\partial_k \Gamma_l - \partial_l \Gamma_k] g^{\underset{\vee}{kl}} g_{ij};$$

(8) se récrit alors

$$(10)\qquad R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = \chi T_{ij}, \qquad R = -\chi T.$$

D. W. Sciama décrit naturellement une particule d'épreuve sans spin par un tenseur inertial symétrique. La précédente remarque montre qu'*il est nécessaire de préciser dans quelle connexion le tenseur inertial sera symétrique. Postulons que ce doit être dans la connexion privilégiée* L.

4. Il suit du contenu du n° 2 que la partie antisymétrique $(1/2) R g_{\underset{\vee}{ij}}$ de $(1/2) R g_{ij}$ se manifestera physiquement (c'est-à-dire « non géométriquement ») dans l'espace-temps physique à métrique symétrique. Si nous faisons passer $-(1/2) R g_{\underset{\vee}{ij}} = (1/2) \chi T g_{\underset{\vee}{ij}}$ au second membre de (10_1), il semble tout naturel d'*interpréter* $-(1/2) T g_{\underset{\vee}{ij}}$ *comme une « densité d'impulsion transversale » ajoutée au* T_{ij} *symétrique de la particule sans spin (« induite » par l'asymétrie de la métrique).*

La « séparation » correspondante W^i entre la direction V^i de l'impulsion-énergie et la quadrivitesse U^i sera [7]

$$(11)\qquad W^i \equiv U^i - V^i = - g^{\underset{\vee}{ij}} V_j.$$

D. W. Sciama [5] déduit des quatre identités de conservation que « les trajectoires des masses d'épreuve sans spin sont des géodésiques de la métrique symétrique $g^{\underline{ij}}$, h_{ij}, $g^{\underline{ij}} h_{\underline{jk}} = \delta^i_k$ ». Selon nous, le calcul de Sciama montre que *les trajectoires* V^i *de l'impulsion-énergie sont lesdites géodésiques; de celles-ci, les trajectoires cinématiques* U^i *se déduiront par la formule* (11).

5. Cherchons la forme approchée de la partie antisymétrique de (10_1) lorsque les g_{ij} diffèrent peu de leurs valeurs Minkowskiennes $\overset{\circ}{g}_{ij}$. Comme les formules

$$(12)\qquad g_{\underset{\vee}{ij};k} = 0 \qquad \text{et} \qquad g^{\underset{\vee}{ij}}{}_{,j} = 0$$

sont satisfaites en théorie de D. W. Sciama [5], nous trouvons, par un calcul d'approximations analogue à ceux de la théorie d'Einstein-Schrödinger [8], *au premier ordre,*

$$(13)\qquad R_{\underset{\vee}{ij}} \simeq R_{\underset{\vee}{ij}} - \frac{R}{2} g_{\underset{\vee}{ij}} \simeq \frac{c^2}{2} \overset{\circ}{g}{}^{kl} \partial_k \partial_l g_{\underset{\vee}{ij}},$$

et par conséquent, *toujours au premier ordre,*

$$(14)\qquad c^2 \Box g_{\underset{\vee}{ij}} \simeq 2\chi T_{\underset{\vee}{ij}}, \qquad c^2 \Box g^{\underset{\vee}{ij}} \simeq 2\chi T^{\underset{\vee}{ij}}.$$

Identifiant avec les formules (10) et (11) de notre précédente Note (¹), nous trouvons

$$G^{ij} = -\overset{ij}{g^{\vee}}, \qquad \alpha = +1. \tag{15}$$

6. Si l'expérience de recul de la source douée de spin proposée dans notre précédente Note donne un résultat positif, il y aura là un argument très fort en faveur de l'existence physique des ondes de gravitation.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(¹) *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 237.

(²) *J. Math. pures et appl.*, 22, 1943, p. 131-132; *dans tout ce* nº **1**, *nous raisonnons à l'approximation Minkowskienne afin d'alléger l'écriture.*

(³) Nous revenons ici aux notations de nos anciens travaux et de notre *Théorie de la Relativité restreinte* (Paris, 1949); les notations, aujourd'hui classiques, de Tomonaga et de Schwinger ont le grave inconvénient de désigner par la même lettre σ la densité de spin et l'hypersurface courante du genre espace.

(⁴) A. Lichnerowicz, *J. Rat. Mech. and Anal.*, 3, 1954, p. 487.

(⁵) D. W. Sciama, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (sous presse).

(⁶) A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la Gravitation*, Paris, 1955, équ. (83.8) et (83.9).

(⁷) *Voir* les formules (2) à (4) rappelées in *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 2199.

(⁸) M. A. Tonnelat, *La théorie du champ unifié d'Einstein*, Paris, 1955, équ. (4.4), (4.14), (4.18), (4.40). Mme Tonnelat nous a fait observer que la validité du résultat (13) exige qu'on ait, avec ses notations, $\gamma \neq 0$, $g \neq 2\gamma$, c'est à dire $g_{ij} - \mathring{g}_{ij} \neq 0$ au premier ordre.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *États excités quantifiés et stables des masses fluides relativistes en rotation.* Note (*) de MM. **Pierre Hillion** et **Jean-Pierre Vigier**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous quantifions les équations du mouvement de la gouttelette relativiste dans un référentiel particulier Σ_0. On retrouve les résultats de C. Van Winter (¹) et l'on a une interprétation concrète du spin.

1. *Première méthode de quantification.* — Dans le référentiel particulier Σ_0 où nous nous étions placés dans notre Note précédente, les composantes de temps du vecteur $\vec{t}$ et du pseudovecteur $\vec{s}$ étaient nulles, ce qui permet la description du mouvement dans un espace à trois dimensions. On a montré que les composantes du moment cinétique sur les axes des deux trièdres liés l'un à $\vec{t}$, l'autre à $\vec{s}$ étaient

$$\text{trièdre lié à } \vec{t} \begin{cases} p_x = -\sin\varphi\, p_\theta - \operatorname{cotg}\varphi \cos\varphi\, p_\varphi + \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta} p_\psi, \\ p_y = \cos\varphi\, p_\theta - \operatorname{cotg}\theta \sin\varphi\, p_\varphi + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} p_\psi, \\ p_t = p_\varphi. \end{cases}$$

On aurait les composantes du moment cinétique sur les axes du trièdre lié à $\vec{s}$ en changeant dans les formules précédentes φ en ψ et p_φ en p_ψ ainsi que le signe de p_x (θ, φ, ψ sont les angles d'Euler).

La quantification s'effectue à la façon habituellc en Mécanique quantique en remplaçant p_θ, p_φ, p_ψ par $-i\hbar\,\partial/\partial\theta$, $-i\hbar\,\partial/\partial\varphi$, $-i\hbar\,\partial/\partial\psi$, les six nombres p_k et p'_k $(k=1, 2, 3)$ deviennent six opérateurs J_k, J'_k $(k=1, 2, 3)$. Par exemple :

$$p_x \to J_1 = -i\hbar\left\{-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\,\text{cotg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\right\},$$

$$p_y \to J_2 = -i\hbar\left\{\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\,\text{cotg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\right\},$$

$$p_t \to J_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Ces opérateurs sont précisément les opérateurs différentiels de C. van Winter (1). La suite de ce paragraphe est empruntée à cet auteur. On cherche les fonctions propres simultanées de J^2, J_3, J'_3 avec pour valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$, $m'\hbar$, $m'\hbar$. Ce sont :

$$Y_j^{m,m'} = \left[\frac{(2j+1)(j+m)!}{2(j-m)!(j+m)!(j-m)!}\right]^{\frac{1}{2}} e^{m\pi_i}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-m+m'}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-m-m'}$$
$$\times\frac{d^{j-m}}{d\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-2m'}\left(\cos\frac{2}{\theta}\right)^{2j+2m'}\exp i(m\varphi+m'\psi),$$

où j prend les valeurs 0, $1/2$, 1, $3/2$, ...; avec $m=-j, j+1, \ldots, j-1\,j$; et $m'=-j, -j+1, \ldots, j-1, j$.

On remarquera que $Y_j^{m,0}$ sont les harmoniques de surface, ce qui impose à j donc à m d'être entiers.

2. *Seconde méthode de quantification.* — La gouttelette étant supposée en équilibre, les forces ne peuvent pas travailler en moyenne et il existe les intégrales premières suivantes du mouvement :

$$p_\varphi = \text{Cte}, \qquad p_\psi = \text{Cte}, \qquad p^2 = \text{Cte}.$$

Les deux premières sont des intégrales de moment cinétique, la dernière, l'intégrale des forces vives. Le mouvement est complètement déterminé puisqu'il dépend de trois paramètres (θ, φ, ψ). Or il est tout naturel d'imposer un mouvement périodique à la gouttelette, c'est-à-dire une périodicité à chaque degré de liberté. On est donc conduit à employer la méthode de quantification de l'ancienne Mécanique quantique, c'est-à-dire en introduisant les variables d'action

$$J_1 = \int_0^{2\pi} p_\varphi\,d_,\varphi \qquad J_2 = \int_0^{2\pi} p_\psi\,d\psi, \qquad J_3 = 2\int_0^{\pi} p_\theta\,d\theta,$$

à écrire, puisque $J_1 = 2\pi p_\varphi$ et $J_2 = 2\pi p_\psi$ à cause des intégrales premières

$$\Delta J_1 = 2\pi \Delta p_\varphi = h, \qquad \Delta J_2 = 2\pi \Delta p_\psi = h,$$

soit

$$p_\varphi = n_1 h + k_1 \qquad \text{et} \qquad p_\psi = n_2 h + k_2 \qquad (n_1 \text{ et } n_2 \text{ entiers, } k_1 \text{ et } k_2 \text{ constantes}),$$

on sait ([2]) que k_1 et k_2 doivent être, soit nuls, soit égaux à $1/2$.

Donc en posant $|m| = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots, |m'| = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$, m aboutit à $p_\varphi = m\hbar$, $p_\psi = m'\hbar$, c'est-à-dire les mêmes résultats qu'au paragraphe précédent.

L'intégrale première des forces vives quand on y porte $p_\varphi = m\hbar$ et $p_\psi = m'\hbar$ conduit à

$$p^2 = j^2 \hbar^2 \qquad \text{et} \qquad j > |m|, \qquad j > |m'|.$$

La comparaison entre les deux méthodes de quantification est intéressante à partir du moment où l'on admet avec Bohm et l'un d'entre nous ([3]) l'existence de niveaux subquantiques sur lesquels se propagent les ondes réelles v décrites par la Mécanique ondulatoire. En effet la quantification d'un système au niveau quantique représente un mouvement périodique d'un phénomène violemment agité au niveau subquantique. Les équations d'onde représentent une description moyenne du mouvement, la quantification s'effectuant soit en cherchant les solutions périodiques de ces équations (Mécanique quantique usuelle), soit en imposant au système des pseudopériodicités. Il n'est pas évident que les deux descriptions moyennes coïncident.

A un moment d'inertie près, l'ancienne Mécanique quantique fournirait l'énergie du mouvement moyen $(\bar{p})^2$ tandis que la Mécanique quantique usuelle donnerait l'énergie moyenne du mouvement $\overline{p^2}$.

On obtient une description physique précise du mouvement de la masse fluide relativiste : les états quantiques apparaissent comme des états d'équilibre de la gouttelette puisque les systèmes d'axes reviennent périodiquement sur eux-mêmes à cause des intégrales premières du mouvement.

3. Revenons au modèle qui nous a servi de point de départ dans notre Note précédente pour interpréter physiquement les nombres m, m', j. m, m' fixent les valeurs des composantes du moment cinétique, j, l'énergie ou le degré d'excitation de la gouttelette relativiste. j est le nombre quantique de spin. Si :

a. Le centre de matière et le centre de masse confondus, $j = 0$ et le spin, apparaît comme une propriété relativiste comme l'avait signalé l'un d'entre nous ([4]).

b. Le vecteur $\vec{t}$ et le pseudovecteur $\vec{s}$ sont colinéaires. On a un mouvement d'un genre orbital qui peut être décrit en fonction d'harmoniques sphériques, ce qui exige que j soit entier. La gouttelette relativiste est l'équivalent d'un rotateur rigide. Elle peut être assimilée à un boson.

c. Le vecteur $\vec{t}$ et le pseudovecteur $\vec{s}$ ne sont pas colinéaires. j est demi-

entier et la gouttelette relativiste peut être assimilée à un fermion. On notera que la structure interne des fermions apparaît plus compliquée que celle des bosons.

d. Revenons au formalisme du paragraphe 1 pour calculer les fonctions d'onde correspondant à $j=1/2$ (fermion de spin 1/2).

On trouve quatre composantes qu'on groupe par deux :

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\exp\frac{i}{2}(\varphi+\psi)\\ \sin\frac{\theta}{2}\exp\frac{i}{2}(\varphi-\psi)\end{pmatrix},\qquad \Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\exp-\frac{i}{2}(\varphi-\psi)\\ \cos\frac{\theta}{2}\exp-\frac{i}{2}(\varphi+\psi)\end{pmatrix}.$$

On montre aisément que $\Phi=\Psi^c$ où $\Psi^c=C^\star\Psi$ où C est l'opérateur conjugaison de charge, donc Φ est la fonction d'onde de l'antiparticule. On passe aussi de Ψ à Φ en changeant θ en $\theta-\pi$ et φ en $-\varphi$, d'où l'on conclut :

1° seuls les fermions ont des antiparticules ;

2° le mouvement de l'antiparticule se fait dans le sens opposé à celui de la particule.

On voit que la « fusion » d'une particule et de son antiparticule est susceptible de donner un boson.

4. Dans une Note ultérieure, nous étendrons le mouvement de la gouttelette et sa quantification à l'espace-temps de la relativité restreinte. Pour développer ce travail nous avons bénéficié des études mathématiques de C. Van Winter (4) qui a déterminé les fonctions d'onde des opérateurs J_3, J'_3, J^2.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) *Thèse*, Gröningen, 1957.

(2) D. Bohm, *Quantum theory*, p. 53.

(3) *Voir* par exemple : D. Bohm, *Causality and Chance in Modern Physics*, Rutledge and Kegan Paul, Londres.

(4) P. Hillion, *Thèse*, Paris, 1957.

CALORIMÉTRIE. — *Précisions sur la courbe transitoire obtenue avec un microcalorimètre*. Note (*) de Mme **Dhetty Blet-Talbot** et M. **Georges Blet**, présentée par M. Gustave Ribaud.

Le phénomène thermique transitoire qui se situe entre l'instant initial où l'on envoie un flux d'énergie constant sur la face antérieure du corps calorimétrique et l'instant où l'équilibre thermique est atteint, est représenté en général par une exponentielle. Nous allons chercher à préciser la forme de cette courbe.

Soit un corps calorimétrique cylindrique, de masse en eau m, dont la face

antérieure A reçoit l'énergie constante et la face postérieure P est équipée de thermocouples.

Soient : l, sa longueur; K, sa conductivité thermique; h, sa diffusivité thermique; S, la surface d'une face terminale (section droite).

Posons :

gain de chaleur par la face antérieure : $q\,dt$;

perte de chaleur par la face antérieure : $q_1\,dt = \mu_1\theta\,dt$ pour la totalité de la surface S;

perte de chaleur par la face postérieure $q_2\,dt = \mu_2\theta\,dt$ pour la surface non recouverte par les couples;

perte de chaleur par les thermocouples : $q'\,dt = \mu'\theta\,dt$.

Nous supposons que les pertes par la surface latérale sont négligeables. Nous allons chercher, de l'équation de Fourier $h(\partial^2\theta/\partial x^2) = \partial\theta/\partial t$ une solution approchée de la forme $\theta = ax + b$, dans laquelle a et b sont des fonctions de (t). Considérons le schéma suivant :

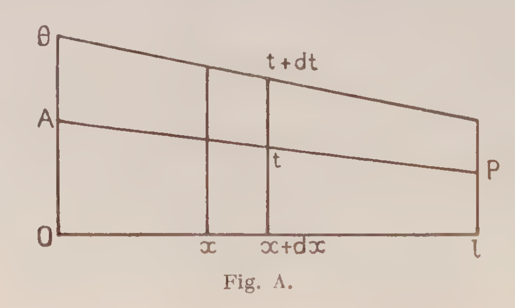


Fig. A.

La chaleur emmagasinée dans la tranche x, $x + dx$ est

$$d^2q = [\theta(t+dt, x) - \theta(t, x)]\frac{m\,dx}{l}, \qquad \text{d'où} \qquad dq = m\left(\frac{a'l}{2} + b'\right)dt.$$

Écrivons l'équation du bilan thermique

$$q = \mu_1 b + (\mu_2 + \mu')(al + b) + m\left(\frac{a'l}{2} + b'\right).$$

Séparons les variables en posant $\alpha + \beta = 1$. On a

$$a = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\frac{\alpha q}{(\mu_2 + \mu')l} \qquad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{2(\mu_2 + \mu')}$$

et

$$b = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)\frac{\beta q}{(\mu_1 + \mu_2 + \mu')} \qquad \text{avec} \quad \tau' = \frac{m}{(\mu_1 + \mu_2 + \mu')}.$$

Calculant α par les conditions aux limites, il vient

$$\alpha = -\frac{(\mu_2 + \mu')^2}{\frac{KS}{l}(\mu_1 + \mu_2 + \mu') + \mu_1(\mu_2 + \mu')}$$

α étant essentiellement négatif, β est plus grand que 1.

Étude de α. — 1° *si* α *très petit*, $\beta \simeq 1$: a est négligeable et il reste $\theta = b$: la température est uniforme dans le corps calorimétrique ; la courbe est une exponentielle vraie de constante de temps $\tau = m/\sigma$, σ étant la somme des coefficients de pertes : $\sigma = \mu_1 + \mu_2 + \mu'$.

2° *si* $\alpha \neq 0$: Limitons le développement en série à deux termes

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \ldots .$$

Il vient

$$\theta = \frac{q}{m}\left[(2\alpha + \beta)\,t - \left(\frac{\alpha}{\tau} + \frac{\beta}{2\tau'}\right)t^2 + \ldots\right]$$

dont les dérivées partielles première et seconde ont respectivement pour valeur :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(0) = \frac{q}{m}(1 + \alpha) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(0) = -\frac{q}{m\tau'}\left[1 + \alpha\left(2\frac{\tau'}{\tau} - 1\right)\right]$$

α étant essentiellement négatif, la pente à l'origine est plus faible que pour une exponentielle. Il en est de même pour la courbure à l'origine si $(2\tau'/\tau) - 1 > 0$, condition généralement remplie.

La courbure à l'origine peut même devenir positive si :

$$1 + \alpha\left(\frac{2\tau'}{\tau} - 1\right) < 0 \qquad \text{soit} \quad \alpha < -\frac{\tau}{2\tau' - \tau}.$$

Le calcul montre que : 1° si μ_1 et μ_2 sont petits devant μ' l'inversion est possible ; 2° si μ' est petit devant μ_1 et μ_2 l'inversion est en pratique impossible.

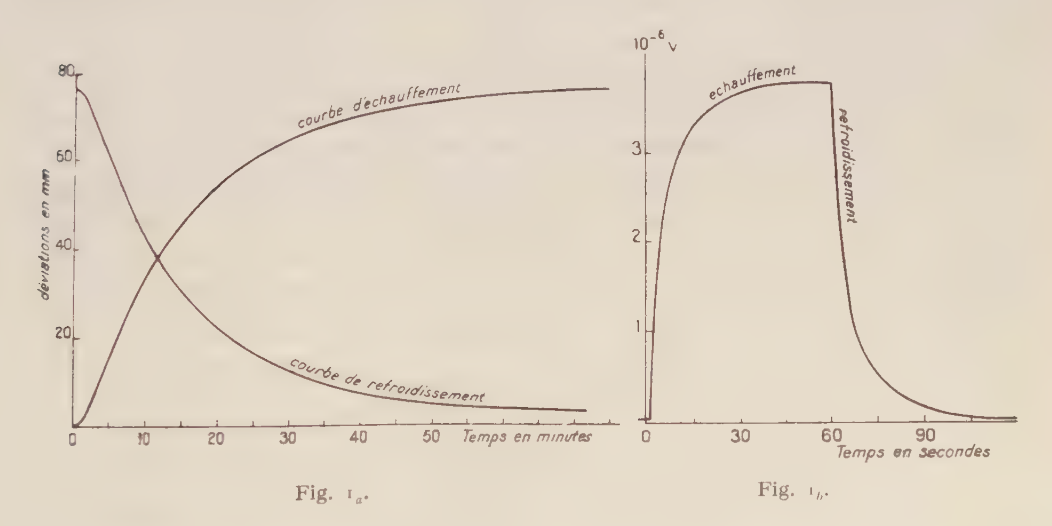


Fig. 1_a. Fig. 1_b.

Vérification expérimentale. — 1° Sur un calorimètre du type Calvet, S est grand et l est petit, mais la valeur de K est fortement réduite par la présence d'une feuille de mica entre le cylindre de laiton et les thermocouples et, d'autre part, μ' est très grand par construction : la quasi-totalité des pertes se faisant

par les thermocouples. L'enregistrement reproduit sur la figure 1_a montre bien l'inversion au départ.

2° Sur notre calorimètre, S est également grand ainsi que l petit, mais l'utilisation d'un couple unique de très petites dimensions nous permet d'avoir simultanément une valeur très élevée pour K et pour μ' une valeur très faible devant μ_1 et μ_2. L'enregistrement reproduit en 1_b, montre bien l'absence d'inversion au départ de la courbe qui n'est cependant pas une exponentielle.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

THERMODYNAMIQUE. — *Chaleurs de fusion de quelques halogénures (bromures alcalins).* Note de Mme **Madeleine Blanc**, présentée par M. Eugène Darmois.

Le but de ce présent travail fut de déterminer les chaleurs de fusion de quelques halogénures alcalins par la méthode de cryométrie à haute température [1], et d'étudier le domaine de validité du critère entropique [2] en fonction de la nature des atomes constituant le cristal.

Ces mesures sont intéressantes selon nous, non seulement du point de vue théorique, mais aussi pour trancher, grâce à cette méthode assez précise, l'indétermination qui résulte de valeurs fort divergentes déjà établies par certains auteurs.

Notre but initial fut de compléter les résultats déjà obtenus pour les halogénures alcalins. Les fluorures [3] et les chlorures [4] ayant été déjà étudiés, nous avons abordé les bromures.

Les bromures de sodium et de potassium sont thermiquement stables et pratiquement non volatils, si bien que leur étude ne présente pas de difficulté spéciale. Par contre, le bromure de lithium extrêmement hygroscopique et oxydable à l'air est d'une étude plus délicate. Nous avons étudié les deux premiers sels dans des creusets de graphite, et le dernier sous argon dans des creusets de platine, afin de pouvoir vérifier, après expérience, le poids de sel étudié.

Les résultats obtenus sont les suivants :

	T_f (°Kelvin).	L_f (cal/mol).	S_f.	$\nu = \frac{1}{3} S_f$.
BrLi	819	3095	3,77	1,25
BrNa	1014	5520	5,44	1,81
BrK	1005	5930	5,90	1,96

Les résultats obtenus pour les bromures de sodium et de potassium montrent une vérification satisfaisante du critère. On conçoit que ces sels, d'après la théorie de Mme G. Darmois et G. Petit [5], se trouvent dans le domaine de validité du critère. En effet, la liaison est très ionique et

l'on peut admettre que les énergies de rotation libration sont identiques dans le cristal et le liquide, de même que la nature des particules.

Le bromure de lithium donne un résultat inattendu, se rapprochant de ceux obtenus pour les sels alcalino-terreux ([6]). La valeur relativement faible de ν qu'on retrouve pour le chlorure de lithium [3 640 cal/mol, $\nu = 1{,}40$ ([8])] montre bien, à notre sens, un rapport à préciser entre la valeur du facteur correctif du critère entropique et le caractère covalentiel des liaisons chimiques. Notons en outre que la valeur obtenue pour le bromure de lithium par notre méthode précise concorde avec la valeur (3 060 cal/mol) trouvée par Kelley par la méthode des diagrammes thermiques ([7]).

([1]) Rolin, *Thèse*, Paris, 1950; Zarzycki, *Thèse*, Paris, 1952; Petit, *Bull. Soc. Chim.*, 1956.

([2]) Mme Darmois-Sutra, *Comptes rendus*, 233, 1951, p. 1027.

([3]) G. Petit et Mlle Crémieu, *Comptes rendus*, 243, 1956, p. 360.

([4]) ClK : V. S. Lyashenko, *Bureau of Mines*, 1950, p. 477; ClNa : Harrison, *Thèse*, Paris, 1955.

([5]) G. Darmois et G. Petit, *Bull. Soc. Chim.* (sous presse).

([6]) Mme M. Blanc, *Comptes rendus* (à paraître).

([7]) Kelley, *Bureau of Mines*, 1936, p. 393.

([8]) Shemtschushny et Rambach, *Z. anorg. Chem.*, 65, 1910, p. 405.

MAGNÉTISME. — *Propriétés magnétoélectriques des lames minces de nickel aimantées à saturation.* Note (*) de Mme **Thérèse Rappeneau**, transmise par M. Jean Cabannes.

Des lames minces de nickel obtenues par évaporation thermique ont été étudiées à la température ambiante entre 4 000 et 8 000 Oe. Les variations relatives de la résistance électrique en fonction du champ magnétique et de l'angle entre le champ et le courant ont été déterminées, et les résultats comparés avec ceux donnés par le nickel massif.

Nous avons étudié, à la température ambiante, l'influence d'un champ magnétique élevé sur la résistivité électrique de lames minces de nickel préparées par évaporation thermique ([1]).

1. On mesure les variations de résistance de ces lames dans un champ magnétique de 8 000 Oe, parallèle à leur plan, la direction du courant électrique faisant angle θ avec le champ magnétique.

Toutes les lames étudiées présentent une variation sinusoïdale de la résistance, celle-ci étant maximum lorsque le champ et le courant sont parallèles et minimum si le champ est perpendiculaire au courant (*fig.* 1). La variation de résistance en fonction de l'angle θ peut donc s'exprimer par la relation

$$\frac{\Delta R}{R} = \Delta(H)\cos^2\theta. \qquad (1)$$

2. La variation relative de la résistance en fonction du champ magnétique a été étudiée entre 4 000 et 8 000 Oe. La résistance décroît suivant une loi linéaire en fonction du champ. Nous avons observé que cette décroissance varie

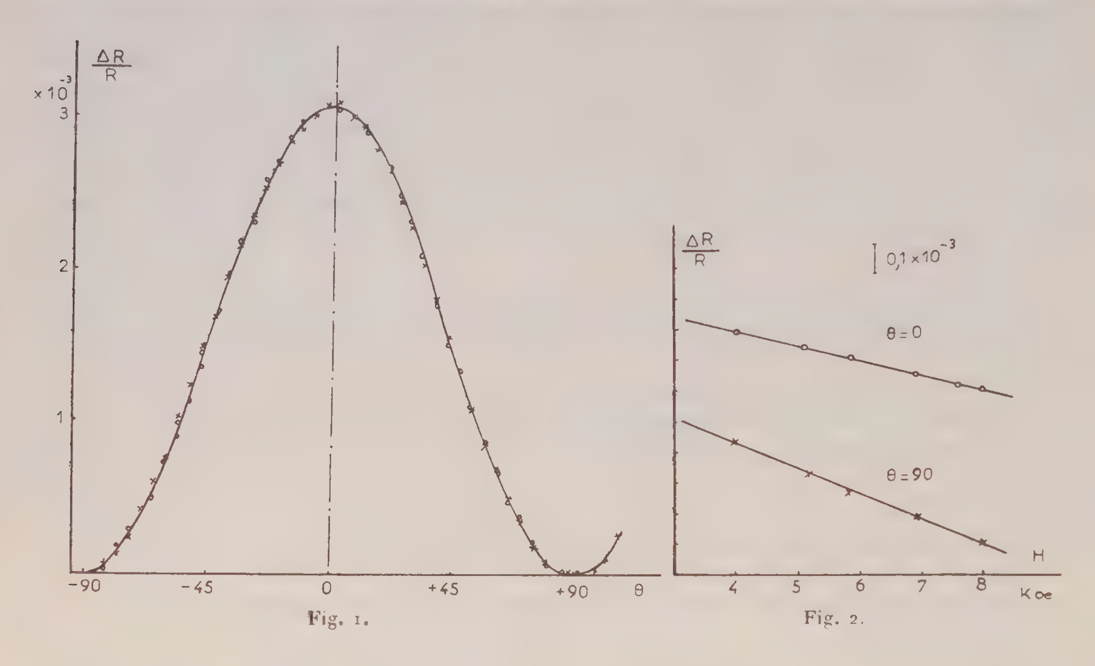


Fig. 1. Fig. 2.

avec l'angle θ. Elle est minimum lorsque $\theta = 0°$ (effet longitudinal) et maximum pour $\theta = 90°$ (effet transversal) (*fig.* 2). Les valeurs de $\beta = (I/R)(\Delta R/\Delta H)$ ont été mesurées pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$ (tableau)

Épaisseur (Å).	$\Delta(H).10^3$.	$\beta_{0°}.10^8$.	$\beta_{90°}.10^8$.	$\Delta(O).10^3$.	$H_1.10^{-6}$.
370	0,044	— 0,075	— 0,60	0	0
445	0,045	— 0,25	— 0,83	0	0
485	0,075	— 0,52	— 1,46	0	0
585	1,22	— 2,32	— 3,58	1,12	0,089
590	2,36	— 2,44	— 4,4	2,2	0,112
640	4,88	— 4,7	— 6,9	4,7	0,214
660	7,75	— 6,2	— 8,2	7,6	0,38
665	9,25	— 6,5	— 8,9	9,06	0,38
690	20,6	— 11,2	— 12,8	20,5	1,3
Nickel massif (fil).	29,15	— 18,6	— 19,5	29,08	3,2

3. A partir des valeurs de $\beta_{0°}$, $\beta_{90°}$ et de $\Delta(H)$, on détermine l'écart relatif de résistance pour un champ appliqué nul, $\Delta(O)$ (tableau I) :

$$(2) \qquad \Delta(O) = \Delta(H) + \Delta\beta H, \qquad \text{avec} \quad \Delta\beta = (\beta_{90°} - \beta_{0°}) < 0.$$

$\Delta(O)$ est l'anisotropie magnétique de résistance en champ nul.

4. Les valeurs de $\Delta(H)$, $\beta_{0°}$ et $\beta_{90°}$ ont été mesurées sur un échantillon de nickel massif (fil), compte tenu du champ démagnétisant. Le coefficient $\beta_{90°}$ a

été déterminé par extrapolation, la saturation n'étant pas tout à fait atteinte, en calculant, d'après la courbe de magnétorésistance, la loi d'approche à la saturation.

Le coefficient $\Delta(O)$, égal à 29,08, est en bon accord avec la valeur 27 calculée ([2]) d'après les constantes cristallines du nickel. Par contre, sa valeur est plus faible dans le cas des lames minces.

On voit (tableau I) que $\Delta(O)$ croît avec l'épaisseur des lames. Pour la plus épaisse, ce coefficient n'est pas très différent de celui du nickel massif. Les trois lames les plus minces, qui se sont révélées non magnétiques, ne présentent aucune anisotropie en champ nul.

Les épaisseurs des lames minces ont été déterminées par interférométrie (méthode de Fizeau) avec une précision de quelques pour cent.

5. L'expression (2) peut se mettre sous la forme

$$\Delta(H) = \Delta(O) - \Delta\beta H.$$

Posons $\Delta(O) = -\Delta\beta H_1$; il vient

$$\Delta(H) = -\Delta\beta(H_1 + H), \tag{3}$$

où H_1 est une constante.

De même que la magnétostriction, la magnétorésistance doit être attribuée à un résidu du couplage spin-orbite. Si nous admettons une loi empirique (vérifiable d'après la variation en fonction de la température) de la forme :

$$\Delta(H) = AM^n, \qquad \Delta(H) = AM^n(H) = A'B^n\left[\mu\frac{(H + H_M)}{kT}\right], \tag{4}$$

où M est l'aimantation à saturation, H_M le champ moléculaire et B la fonction de Brillouin.

En supposant $H \ll H_M$, on a

$$\Delta(H) = A'B^{n-1}\left[B\left(\frac{\mu H_M}{kT}\right) + n\frac{\mu H}{kT}B'\left(\frac{\mu H_M}{kT}\right)\right],$$

(B' est la dérivée de la fonction de Brillouin).

Cette expression peut être mise sous la forme

$$\Delta(H) = C(H_1 + H).$$

Un calcul simple montre que

$$H_1 = H_M\frac{1}{n}\frac{T}{T_c}\frac{B\left(\frac{\mu H_M}{kT}\right)}{B'\left(\frac{\mu H_M}{kT}\right)}.$$

On trouve, pour le nickel, à la température ambiante :

$$H_1 = \frac{8}{n}H_M.$$

Dans le cas du nickel massif, H_1 (tableau I) est de l'ordre de grandeur du champ moléculaire ($H_M \approx 9.10^6$ Oe). Pour le nickel en lames minces, H_1 décroît avec l'épaisseur des lames.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) T. Rappeneau, *Comptes rendus*, 243, 1956, p. 1403.

(2) R. Becker et W. Döring, *Ferromagnetismus*, Berlin, 1939.

MAGNÉTISME. — *Sur l'interprétation du paramagnétisme indépendant de la température*. Note de MM. **Jean Guy**, **Jacques Tillieu** et **Jean Baudet**, présentée par M. Paul Pascal.

Si nous considérons une molécule (n électrons) dans son état fondamental pour lequel le moment magnétique permanent est nul (dans ce cas, ψ_0 est non dégénérée et peut toujours être supposée réelle), nous disposons de deux méthodes pour calculer les susceptibilités [1].

1. Par la théorie des perturbations, on aboutit à la formule de Van Vleck [2]

$$(1)\qquad \chi_{uu} = \chi^{L}_{uu} + \chi^{+}_{uu} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec

$$(2)\qquad \chi^{L}_{uu} = -\frac{Ne^2}{4mc^2}\sum_{i=1}^{n}\int (v_i^2 + w_i^2)\psi_0^2\, d\tau \quad \text{(terme diamagnétique de Langevin} < 0)$$

$$(3)\qquad \chi^{+}_{uu} = \frac{Ne^2}{2m^2c^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_i \int \psi_0 M_{iu}\psi_k\, d\tau\right|^2}{E_k - E_0}$$

(terme correctif paramagnétique de Van Vleck > 0).

Les difficultés de détermination effective des séries du type (3) ont déjà été signalées [3]. Néanmoins, les auteurs admettent usuellement que de rares molécules peuvent conduire à $\chi^{+}_{uu} > |\chi^{L}_{uu}|$ [2], [4] et expliquent ainsi les quelques observations expérimentales de paramagnétisme indépendant de la température.

2. Par la méthode de variation, en posant pour ψ en présence du champ H_u appliqué suivant Ou

$$\psi = \psi_0(1 + H_u . g_u) = \psi_0\left(1 + \frac{i\pi e}{hc} H_u . G_u\right).$$

Ces deux méthodes sont mathématiquement équivalentes et la susceptibilité est encore donnée par (1), χ^{L}_{uu} restant déterminé par (2) tandis que χ^{+}_{uu} devient [5]

$$(4)\qquad \chi^{+}_{uu} = \frac{Ne^2}{4mc^2}\left[2\sum_i \int \psi_0^2 \frac{\partial G_u}{\partial \varphi_i}\, d\tau - \int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} G_u}\right|^2 d\tau\right] \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} = v_i\frac{\partial}{\partial w_i} - w_i\frac{\partial}{\partial v_i}\right)$$

où G_u est la fonction qui rend χ^+_{uu} maximum, solution de

(5) $$-\sum_i \frac{\partial}{\partial\varphi_i}(\psi_0^2) + \psi_0^2\,\Delta G_u + \overrightarrow{\text{grad}\,G_u}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}\,\psi_0^2} = 0,$$

et cette condition entraîne l'égalité [4], [5]

(6) $$\sum_i \int \psi_0^2 \frac{\partial G_u}{\partial\varphi_i}\,d\tau = \int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}\,G_u}\right|^2 d\tau.$$

3. La comparaison de χ^+_{uu} et $|\chi^L_{uu}|$ devient facile en utilisant (4) et (6). Commençons par le cas simple où ψ_0 est monoélectronique : avec les coordonnées semi-polaires u, ρ, φ, on peut écrire :

(7) $$\int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}\,G_u}\right|^2 d\tau \geqq \int \frac{\psi_0^2}{\rho^2}\left(\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\right)^2 d\tau,$$

puisque

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}\,G_u}\right|^2 = \left(\frac{\partial G_u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_u}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\right)^2.$$

Par suite :

(8) $$\left[\int \rho^2\psi_0^2\,d\tau\right]\left[\int \psi_0^2\left|\overrightarrow{\text{grad}\,G_u}\right|^2 d\tau\right] \geqq \left[\int \rho^2\psi_0^2\,d\tau\right]\left[\int \frac{\psi_0^2}{\rho^2}\left(\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\right)^2 d\tau\right].$$

Or l'inégalité de convexité de Hölder [6],

$$[M(f)]^\alpha [M(h)]^\beta \geqq M(f^\alpha h^\beta) \qquad \begin{pmatrix}\alpha \text{ et } \beta > 0\\ \alpha+\beta = 1\end{pmatrix},$$

donne ici, en posant $f = \rho^2$, $h = (1/\rho^2)(\partial G_u/\partial\varphi)^2$, $\alpha = \beta = 1/2$

(9) $$\left[\int \rho^2\psi_0^2\,d\tau\right]\left[\int \frac{\psi_0^2}{\rho^2}\left(\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\right)^2 d\tau\right] \geqq \left[\int \psi_0^2\left|\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\right| d\tau\right]^2 \geqq \left[\int \psi_0^2\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\,d\tau\right]^2.$$

Il en résulte, d'après (8) et (6) :

(10) $$\left[\int \rho^2\psi_0^2\,d\tau\right]\left[\int \psi_0^2\left|\overrightarrow{\text{grad}\,G_u}\right|^2 d\tau\right] \geqq \left[\int \psi_0^2\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\,d\tau\right]^2$$

et

(11) $$\frac{Ne^2}{4mc^2}\int \rho^2\psi_0^2\,d\tau \geqq \frac{Ne^2}{4mc^2}\int \psi_0^2\frac{\partial G_u}{\partial\varphi}\,d\tau \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |\chi^L_{uu}| \geqq \chi^+_{uu}.$$

4. Ce dernier résultat est généralisable aux fonctions ψ_0 polyélectroniques. Il suffit de démontrer

(10′) $$\left[\sum_i \int \rho_i^2\psi_0^2\,d\tau\right]\left[\sum_i \int \psi_0^2\left|\overrightarrow{\text{grad}_i G_u}\right|^2 d\tau\right] \geqq \left[\sum_i \int \psi_0^2\frac{\partial G_u}{\partial\varphi_i}\,\partial\tau\right]^2.$$

Or, nous pouvons écrire une inégalité analogue à (7)

(7′) $$\sum_i \int \psi_0^2\left|\overrightarrow{\text{grad}_i G_u}\right|^2 d\tau \geqq \sum_i \int \frac{\psi_0^2}{\rho_i^2}\left(\frac{\partial G_u}{\partial\varphi_i}\right)^2 d\tau,$$

ce qui entraîne

$$(8') \quad \left[\sum_i \int \rho_i^2 \psi_0^2 \, d\tau\right]\left[\sum_i \int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}_i G_u}\right|^2 d\tau\right] \geq \left[\sum_i \int \rho_i^2 \psi_0^2 \, d\tau\right]\left[\sum_i \int \frac{\psi_0^2}{\rho_i^2}\left(\frac{\partial G_u}{\partial \varphi_i}\right)^2 d\tau\right].$$

Puisque, d'après (10), on a

$$(10'') \quad \left[\int \rho_i^2 \psi_0^2 \, d\tau\right]\left[\int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}_i G_u}\right|^2 d\tau\right] \geq \left[\int \psi_0^2 \left(\frac{\partial G_u}{\partial \varphi_i}\right)^2 d\tau\right]^2,$$

la démonstration de (10′) sera complète si

$$(12) \quad \left[\int \rho_i^2 \psi_0^2 \, d\tau\right]\left[\int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}_j G_u}\right|^2 d\tau\right] + \left[\int \rho_j^2 \psi_0^2 \, d\tau\right]\left[\int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}_i G_u}\right|^2 d\tau\right]$$
$$\geq 2\left[\int \psi_0^2 \frac{\partial G_u}{\partial \varphi_i} d\tau\right]\left[\int \psi_0^2 \frac{\partial G_u}{\partial \varphi_j} d\tau\right] \quad (i \neq j).$$

Or, ψ_0 est antisymétrique et G_u symétrique, d'où

$$\int \rho_i^2 \psi_0^2 \, d\tau = \int \rho_j^2 \psi_0^2 \, d\tau,$$

$$\int \psi_0^2 \frac{\partial G_u}{\partial \varphi_i} d\tau = \int \psi_0^2 \frac{\partial G_u}{\partial \varphi_j} d\tau \quad \text{et} \quad \int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}_i G_u}\right|^2 d\tau = \int \psi_0^2 \left|\overrightarrow{\text{grad}_j G_u}\right|^2 d\tau.$$

L'inégalité (12) est donc équivalente à (10″) et ceci prouve l'exactitude de (10′).

En conclusion, l'inégalité $\chi_{uu}^{+} > |\chi_{uu}^{L}|$ ne peut jamais avoir lieu; elle ne peut donc être invoquée pour expliquer les cas expérimentaux de paramagnétisme indépendant de la température pour lesquels il convient de rechercher un autre mécanisme.

(1) J. Tillieu, *Ann. de Phys.*, 2, 1957, p. 471 et 631.
(2) J. H. Van Vleck, *The theory of electric and magnetic susceptibilities*, p. 275.
(3) J. Tillieu et J. Guy, *Comptes rendus*, 236, 1953, p. 2222.
(4) P. W. Selwood, *Magnetochemistry* (2e édit.), p. 83.
(5) J. Tillieu et J. Guy, *Comptes rendus*, 239, 1954, p. 1203.
(6) N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques*, 1re partie, livre VI, chap. I, p. 11.

(*Faculté de Pharmacie de Paris, Laboratoire de Physique moléculaire.*)

MAGNÉTISME. — *Étude des propriétés magnétiques d'une série d'alliages nickel-cuivre.* Note (*) de MM. **André J. P. Meyer** et **Claude Wolff**, transmise par M. Gabriel Foëx.

Nous avons repris l'étude des propriétés magnétiques d'une série d'alliages nickel-cuivre dont les titres établis à 0,1 % près s'échelonnent entre 0 et 35 % atomique de cuivre; ces alliages préparés au four à induction, à partir de nickel ex-carbonyle et de cuivre électrolytique, ont été recuits 250 h à 1000° C

sous vide, afin de réduire la ségrégation d'une phase plus riche en nickel [1]; l'homogénéité des alliages a été contrôlée par métallographie.

Sur ces alliages on a mesuré les températures de Curie θ par la variation thermique de l'aimantation spontanée et par la détermination de l'anomalie de chaleur spécifique au point de transition. Les résultats figurent au tableau ci-dessous :

Alliage % at. de cuivre.	0.	10.	15.	20.	30.	35.
θ°K	631 ± 2	512 ± 2	465 ± 2	411 ± 3	305 ± 3	270 ± 3
$\sigma_{\infty,0}$ (u. é. m. C. G. S.)	58,60 $\pm 0,1$	46,95 $\pm 0,1$	41,95 $\pm 0,1$	35,85 $\pm 0,1$	25,20 $\pm 0,1$	19,75 $\pm 0,1$

Le graphique 1 montre la variation de θ en fonction de la concentration en cuivre; θ décroît linéairement de 11°,1 par pour-cent atomique de Cu ajouté, dans le domaine de concentration étudié. L'extrapolation linéaire des températures de Curie vers $\theta = 0$ correspond à une composition de $57,0 \pm 0,5$ % at. de cuivre.

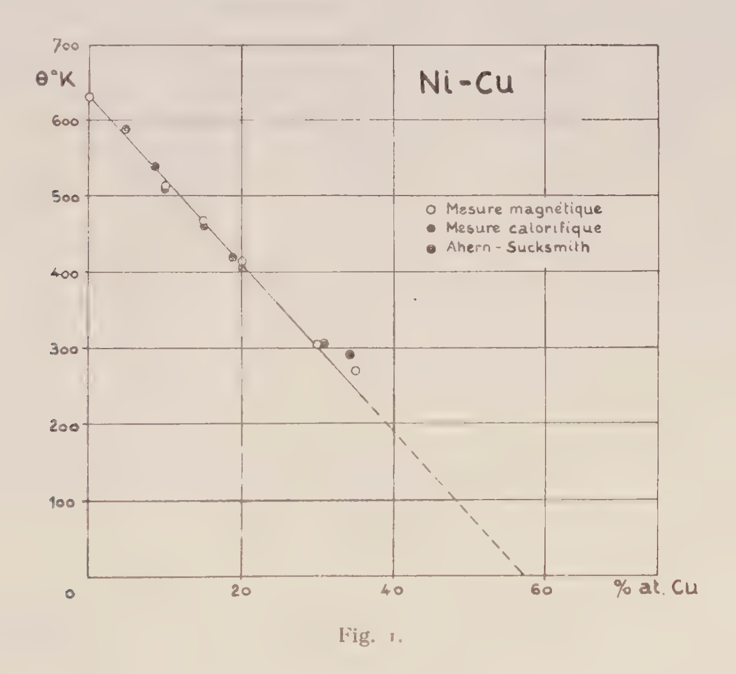


Fig. 1.

Les aimantations ont été mesurées en fonction du champ jusqu'à 26 000 Oe et en fonction de la température entre 100 et 293° K. Les mesures ont été faites par la méthode d'extraction [2] sur des ellipsoïdes de 8 et 4 mm d'axes. On a pu en dégager les résultats suivants :

A température constante, les aimantations en fonction du champ suivent dans la limite des erreurs une loi de la forme [3] :

$$\sigma_{H,T} = \sigma_{\infty,T}\left(1 - \frac{b}{H^2}\right) + \chi H.$$

L'aimantation à saturation $\sigma_{\infty,T}$ est obtenue par extrapolation linéaire vers $1/H^2 = 0$ des valeurs de $\sigma_{H,T}$ mesurées dans les champs inférieurs à 1 000 Oe. La variation en fonction de T de l'aimantation à saturation, dans l'intervalle de température exploré, obéit à une loi de la forme

$$\sigma_{\infty,T} = \sigma_{\infty,0}\left(1 - AT^{\frac{5}{2}}\right).$$

L'aimantation à saturation absolue est obtenue par extrapolation vers $T = 0$ de la droite $\sigma_{\infty,T} = f(T^{5/2})$. Les valeurs ainsi obtenues figurent au tableau ci-dessus, et sont portées en fonction de la concentration en cuivre des alliages dans le graphique 2.

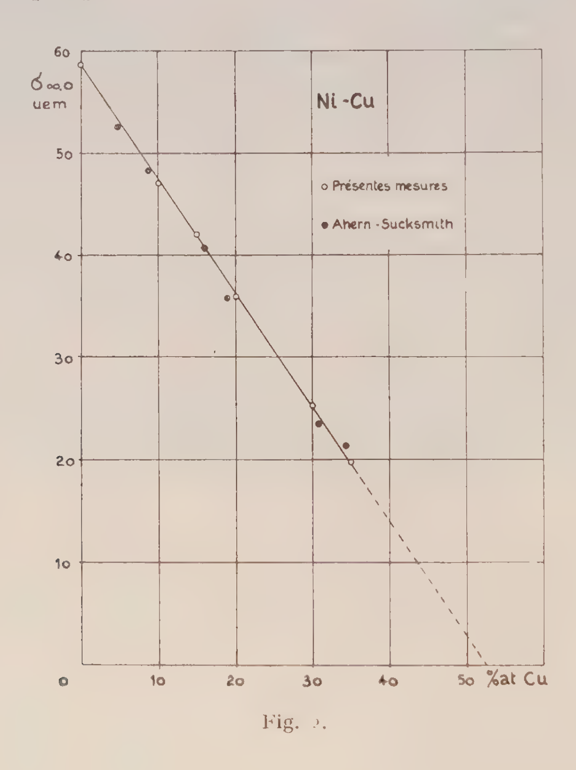


Fig. 2.

Comme les points de Curie, les aimantations décroissent linéairement avec la concentration en cuivre ; cette décroissance serait de 1,17 μ_B pour 100 % de Cu. Rappelons que la pente obtenue par Alder ([4]) était de $-1,00$ μ_B. L'extrapolation linéaire des aimantations à la saturation absolue vers $\sigma_{\infty,0} = 0$ correspond à une composition de $52,5 \pm 0,3$ % at. de cuivre.

Les aimantations spontanées, obtenues par extrapolation vers $H = 0$ des courbes isothermes $\sigma = f(H)$, ont permis de tracer le diagramme des états correspondants pour la série d'alliages étudiés (*fig.* 3). Les courbes s'éloignent de plus en plus de la courbe théorique tracée pour $j = 1/2$, très voisine de celle du nickel, au fur et à mesure que la concentration en cuivre augmente.

Ces résultats sont très différents de ceux donnés par Alder ([4]) et Marian ([5]) et en bon accord avec ceux obtenus récemment par Ahern et Sucksmith ([6]).

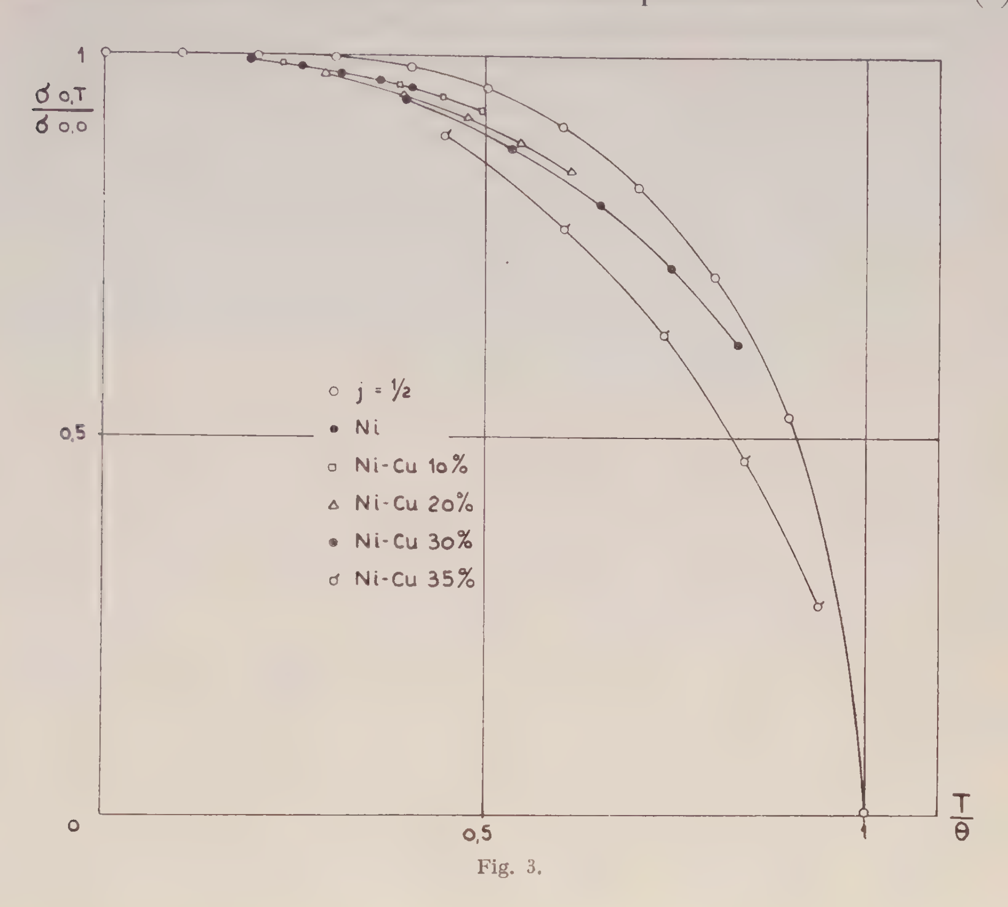


Fig. 3.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

([1]) KRUPKOWSKI, *Rev. de Métallurgie*, 26, 1929, p. 131 et 193.

([2]) H. DANAN, *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 73.

([3]) H. DANAN et A. J. P. MEYER, *Colloque National de Magnétisme*, Strasbourg, juillet 1957.

([4]) ALDER, *Thèse*, Zurich, 1916.

([5]) MARIAN, *Ann. Physique*, 11e série, 7, 1937, p. 459.

([6]) AHERN et SUCKSMITH, *Proc. Phys. Soc.*, B 69, 1956, p. 1050.

ÉLECTRONIQUE. — *Étude et compensation de l'inhomogénéité du champ magnétique d'un électroaimant.* Note (*) de MM. **HENRI BENOIT** et **MICHEL SAUZADE**, présentée par M. Louis de Broglie.

1. *Dispositif expérimental.* — Nous déplaçons une bobine exploratrice dans l'entrefer d'un électroaimant et utilisons un intégrateur photoélectrique décrit précédemment ([1]). Le fluxmètre ainsi réalisé nous donne

directement la variation de B_z composante du champ magnétique parallèle à l'axe des pièces polaires.

La réponse de cet instrument est rapide et, évaluée en fréquence, correspond à la bande 0,05 et 80 Hz lorsque l'impédance de la bobine exploratrice est inférieure à 3 000 Ω, ce qui est présentement le cas.

La bobine est montée sur un mandrin de plexiglass dont les dimensions extérieures sont : diamètre 10 mm, longueur 6,8 mm, conformément aux calculs de Herzog et Tischler ([2]). Elle comporte 9 440 tours de fil 4/100e, sa surface effective est de 2 600 cm^2 et sa résistance de 2100 Ω.

Un mécanisme à vis hélicoïdale fixé aux pièces polaires permet de déplacer la bobine dans l'entrefer, tout en lui assurant le maximum de stabilité. Un potentiomètre hélicoïdal monté sur l'axe de la vis attaque le tambour d'un enregistreur *xy*. L'autre entrée est commandée par la sortie de l'intégrateur et nous enregistrons ainsi automatiquement les valeurs de B_z le long d'un diamètre.

En déplaçant le système nous pouvons étudier les variations de B_z suivant des diamètres de différentes directions repérés par leur angle polaire θ, et dans des plans parallèles aux faces polaires repérés par leur distance z au plan de symétrie de l'entrefer.

Nous avons de même mesuré la variation de B_z le long de Oz en déplaçant une bobine de 4 000 cm^2 de surface effective, suivant la direction $z'z$ de l'axe des pièces polaires.

2. *Inhomogénéité du champ magnétique.* — Nous avons ainsi étudié le champ dans l'entrefer d'un électroaimant Beaudouin de série, dont les pièces polaires ont 20 cm de diamètre et dont l'entrefer est de 40 mm.

La figure 1 représente différents enregistrements obtenus dans les conditions suivantes :

Champ 3 200 gauss :

Courbe A : $\theta = 0°$, $z = 0$;

» B : $\theta = 0°$, $z = 4$ mm;

» C : $\theta = 90°$, $z = 0$.

Nous avons pu observer le minimum déjà décelé par d'autres expérimentateurs dans la répartition radiale de la composante B_z au voisinage du centre ([3]). Le minimum ne se produit pas rigoureusement au centre mécanique de l'appareil. De plus, le « trou » n'est, en général, pas symétrique : le maximum d'un côté est plus élevé que de l'autre. Cette dissymétrie va en croissant avec le champ et n'est pas reproductible; elle n'est donc pas uniquement due à un manque de parallélisme mécanique. Par contre, la position du minimum et la forme de la courbe au voisinage de ce minimum se reproduisaient d'une expérience à l'autre et nous n'avons pas pu retrouver l'influence des conditions d'établissement du courant, signalée par d'autres auteurs ([3]).

Nous avons pu, par contre, mettre en évidence une influence du mode de magnétisation. Si nous n'alimentons que les bobines montées sur une pièce polaire, la répartition du champ change considérablement. La figure 2 représente B_z avec les conditions suivantes :

Champ : 3 200 gauss :

Courbe A : dans le plan de symétrie;

» B : $z = +6$ mm (dans la direction des bobines magnétisantes);

» C : $z = -6$ mm (sur la figure 2 l'échelle verticale relative à la courbe C a été réduite dix fois).

Une symétrie électrique aussi parfaite que possible est donc recommandable pour obtenir un champ uniforme.

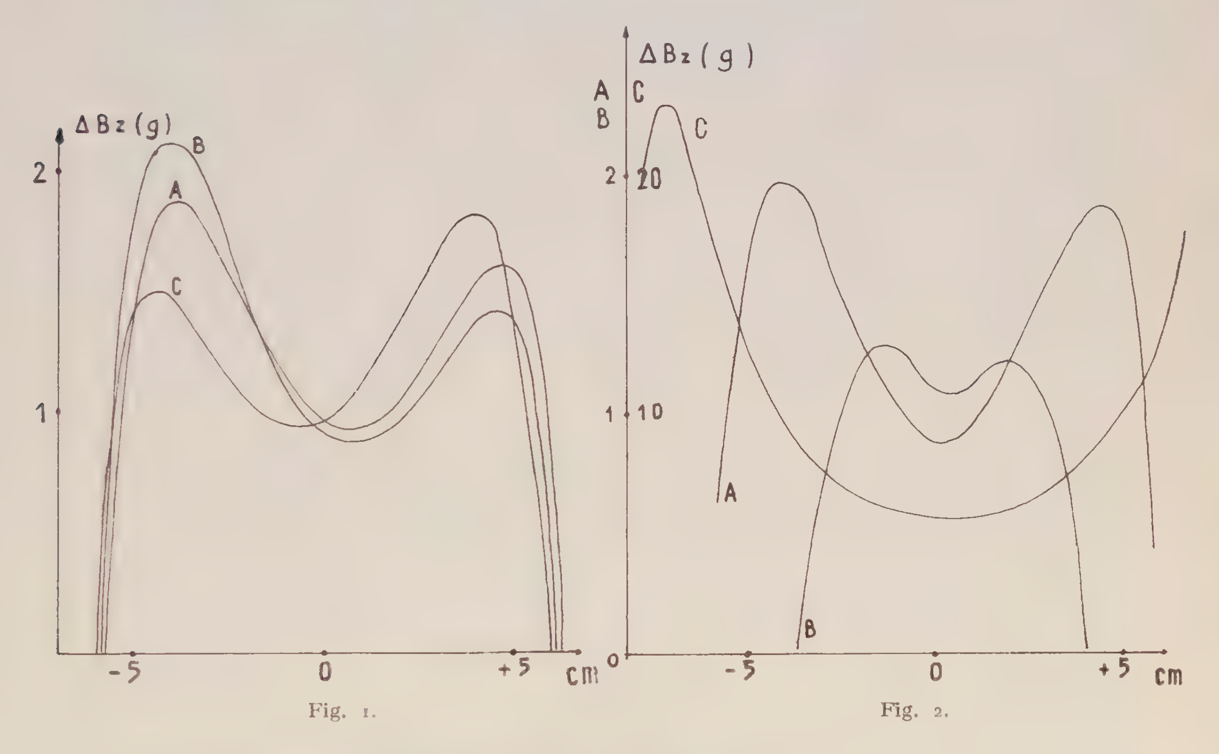


Fig. 1.

Fig. 2.

3. *Compensation de l'inhomogénéité.* — Nous avons cherché à compenser cette inhomogénéité dans le plan de symétrie de l'entrefer par des bobines placées sur les pièces polaires.

Nous avons employé deux jeux de bobines concentriques, les premières de 35 mm de diamètre ont sept tours de fil 15/100e [d'après le calcul de Primas et Günthard ([4])] et les secondes de 70 mm de diamètre ont 13 tours de fil 15/100e.

La figure 3 représente les résultats que nous avons obtenus avec des courants de compensation de 100 mA dans les premières et 87 mA dans les dernières.

4. *Conclusion.* — Nous avons constaté l'existence d'un minimum du champ magnétique au centre de l'entrefer d'un électroaimant et étudié les propriétés de sa répartition. Nous avons donné un moyen de corriger cette inhomogénéité par quatre bobines plates placées sur les pôles.

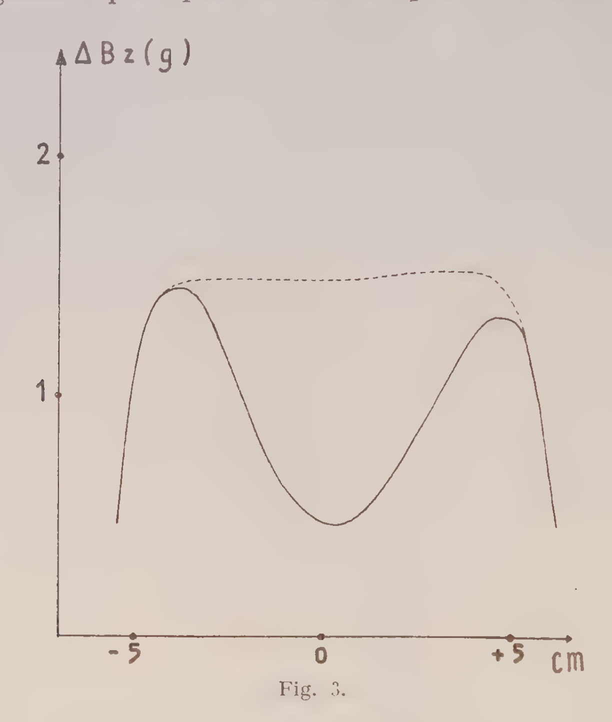


Fig. 3.

Nous obtenons ainsi le long d'un diamètre, sur une distance de 7 cm, un champ de 4 000 gauss, homogène à 10^{-5} près; l'étendue de cette zone favorable le long de Oz est d'environ 6 mm.

(*) Séance du 6 janvier 1958.

([1]) *Comptes rendus* (à paraître).

([2]) Herzog et Tischler, *R. S. I.*, 24, 1953, p. 1000.

([3]) Bowers, Phil, Kamper et Knight, *J. S. I.*, 34, 1957, p. 49.

([4]) Primas et Günthard, *H. P. A.*, 30, 1957, p. 331.

(*Université de Paris, Laboratoire d'Electronique et de Radioélectricité Fontenay-aux-Roses (Seine) B.P. N° 9 Laboratoire de recherches de la R.N.U.R.*).

ÉLECTRONIQUE. — *Nouvelle méthode de réglage des circuits ultra haute fréquence d'un accélérateur linéaire d'électrons.* Note (*) de M. **Marcel Pillon**, présentée par M. Louis de Broglie.

La construction d'un accélérateur d'électrons pose le problème de l'adaptation d'un ensemble U. H. F. complexe dont la partie délicate est constituée

essentiellement par le guide accélérateur proprement dit, qui est une structure à forte dispersion. Les transitions entre cet élément et les guides rectangulaires d'amenée et d'évacuation de la puissance haute fréquence sont du type bouton de porte et offrent deux paramètres de réglage.

La proximité des différents modes de résonance tous très étroits, rend l'adaptation délicate avec la technique courante du banc d'onde stationnaire classique. Nous exposons ici une méthode de réglage plus simple et plus rapide, mettant en œuvre le banc de mesure dynamique mis au point par M. R. Olivier (1), et décrit par lui au Congrès hyperfréquences du mois d'octobre 1957.

Principe des mesures. — L'élément fondamental du banc de mesure dynamique est un tube oscillateur carcinotron, associé à un circuit de régulation de la puissance de sortie. On peut ainsi disposer d'une puissance constante à ± 2 dB dans tout l'intervalle 2 000 à 4 000 MHz. Il est en outre possible de moduler en fréquence cet oscillateur dans une gamme qui peut aller de quelques mégahertz à la totalité de la bande du générateur.

En associant à ce générateur U. H. F. modulé en fréquence, un coupleur directif dans le sens retour, nous réalisons un mesureur dynamique de taux d'onde stationnaire à lecture directe bien adapté à la solution de notre problème. Il suffit pour cela d'appliquer au balayage horizontal d'un oscillographe la dent de scie de modulation du carcinotron, et sur l'amplificateur vertical le courant détecté à la sortie du coupleur. Pour étalonner le dispositif, il suffit de repérer les taux d'onde stationnaire 1 à ∞ à l'aide d'une charge adaptée et en laissant le générateur débiter en circuit ouvert. La courbe de détection du cristal utilisé, duement contrôlée, permet alors de tracer une échelle de valeurs du taux d'onde stationnaire qu'on peut reporter sur les oscillogrammes qui, tels celui donné figure 1 représentent alors les courbes du taux d'onde stationnaire en fonction de la fréquence.

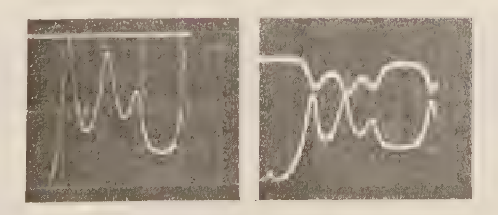


Fig. 1.

Si l'on place aussi une sonde à la sortie du dispositif étudié, on peut tracer simultanément la courbe de la puissance haute fréquence transmise; on a donc un moyen de vérifier l'adaptation du système. Un ondemètre à absorp-

tion à forte surtension nous permet de mesurer la fréquence du mode principal. Le montage expérimental est le suivant (*fig.* 2).

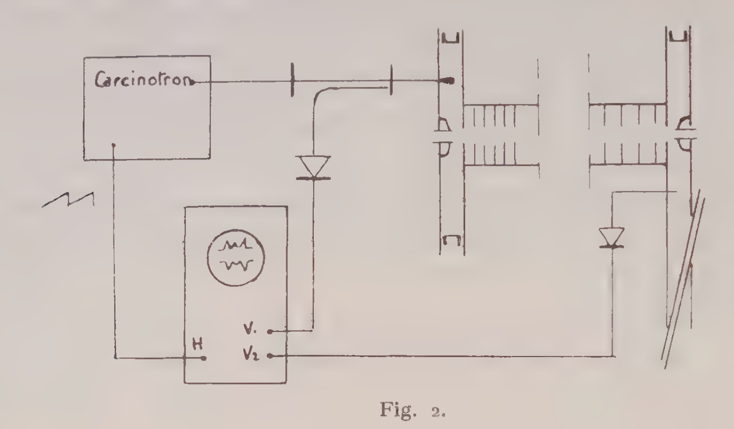
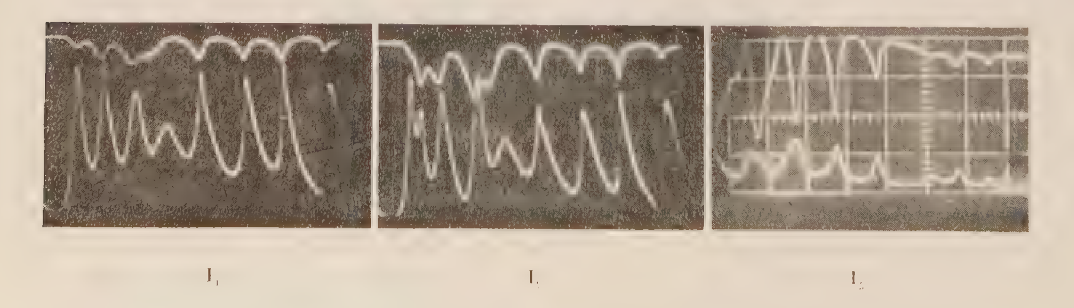


Fig. 2.

Réglage de l'adaptation. — Nous cherchons à exciter dans le guide accélérateur le mode fondamental seul. C'est l'idéal malheureusement inaccessible et nous devrons nous contenter de favoriser au maximum ce mode et atténuer le plus possible les modes parasites voisins. Le guide ne peut être dissocié des éléments annexes d'amenée et d'évacuation de la puissance haute fréquence. Nous agissons sur les deux paramètres de réglage des transitions « bouton de porte » pour essayer d'obtenir le résultat recherché.

Les diverses séries d'enregistrements photographiques qui suivent illustrent les diverses étapes du réglage de l'adaptation.

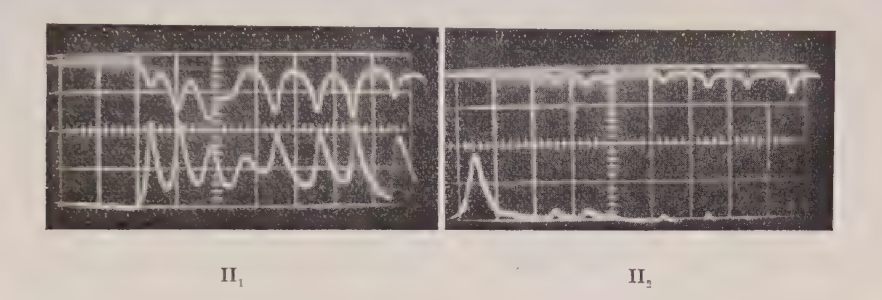
1° Influence de l'enfoncement du tube central du bouton de porte d'entrée. Si le tube est complètement enfoncé, les premières cavités du guide accélérateur sont très fortement perturbées, ce qui se traduit par la suppression presque totale des premiers modes. Notons l'extrême sensibilité de ce réglage : sur les deux enregistrements I_1 et I_2, l'enfoncement diffère de moins de 1 mm. On remarque que si le premier mode est peu perturbé, les suivants sont très différents.



I_1 I_2 I_3

2° Position du piston de court-circuit du guide d'amenée. L'énergie circulant dans le guide rectangulaire qui n'est pas passée dans le guide

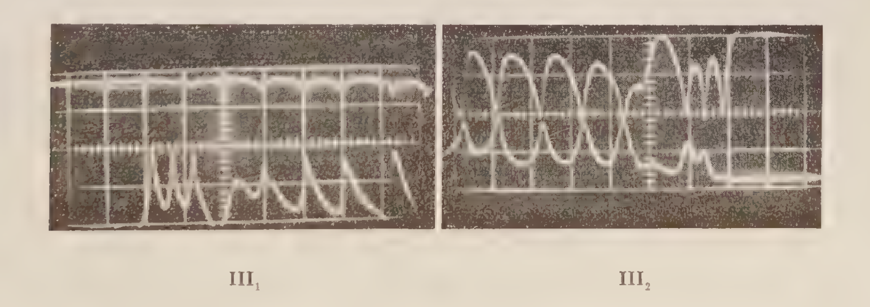
accélérateur se réfléchit sur le piston et en arrivant au niveau de la transition peut se trouver en phase ou en opposition avec l'énergie incidente, on peut donc en agissant sur le régime du guide d'entrée, régler le passage d'énergie dans le guide accélérateur (*fig.* III_1 et III_2).



II_1 II_2

Les deux enregistrements photographiques de la puissance transmise et du taux d'onde stationnaire montrent les deux cas ci-dessus. Le taux d'onde stationnaire est très grand et aucune énergie n'est transmise, ou le taux d'onde stationnaire se rapproche de 1, la puissance transmise devient notable et l'on remarque que les deux courbes sont très semblables.

3° Tube central du bouton de porte de sortie. La perturbation apportée au guide accélérateur est aussi sensible que pour l'entrée, mais porte sur d'autres modes (*fig.* III_1 et III_2).



III_1 III_2

4° Le piston de court-circuit du guide de sortie a un effet indépendant de la fréquence et agit surtout sur la puissance transmise à la charge adaptée. Une certaine partie de l'énergie ayant été dissipée dans le guide accélérateur, la position de ce piston ne modifie que peu la courbe du taux d'onde stationnaire en fonction de la fréquence relevée à l'entrée de l'ensemble du circuit U. H. F.

Conclusion. — Par cette méthode dynamique à lecture directe, on peut séparer les effets des divers paramètres de réglage. D'autre part, la déformation lente et continue des courbes observées quand on effectue progressivement un réglage permet de se placer toujours dans les conditions

optima qui risqueraient de passer inaperçues dans des mesures discontinues au banc d'onde stationnaire.

Nous avons pu par ce moyen adapter le guide sur le mode pour lequel il a été calculé, avec un taux d'onde stationnaire inférieur à 1,08 tandis que les modes les plus voisins offraient des taux d'ondes stationnaires respectivement de 1,17, 2,15 et 5 environ.

(*) Séance du 20 janvier 1957.

(1) *Onde électrique*, novembre 1956.

ÉLECTRONIQUE. — *Instabilité transversale des faisceaux électroniques.* Note de M. **Bernard Epsztein**, présentée par M. Camille Gutton.

De nombreux auteurs ont étudié les oscillations *longitudinales* des faisceaux électroniques dans un espace de glissement. Ces ondes de plasma découvertes par Ramo se comportent, par rapport à un observateur se mouvant avec le faisceau, comme des ondes stables de compression.

L'objet de la présente communication est de montrer qu'il existe aussi, tout au moins dans les faisceaux minces, des vibrations *transversales* et que ces vibrations sont en général instables. L'existence de cette propriété a déjà été signalée pour les faisceaux plats dans une publication antérieure (1). Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

En l'absence de toute compensation de la charge d'espace continue par des ions, et de tout champ électrique ou magnétique appliqué, les déformations transversales d'un faisceau plat croissent exponentiellement dans le temps. Les petits déplacements transversaux du faisceau sont de la forme

$$\delta y = \delta y_0 \, e^{\pm \Omega_p t}.$$

Les signes + et — correspondent l'un à une onde amplifiée, l'autre à une onde atténuée, la constante Ω_p étant égale à la fréquence de plasma réduite dans le cas où le faisceau est loin de toute électrode. En présence de plans métalliques parallèles au faisceau, l'instabilité est accrue par les charges images.

Le cas qui sera plus spécialement étudié ici est celui, très important en pratique, des faisceaux cylindriques de révolution. Pour établir simplement l'existence des vibrations transversales, nous examinerons d'abord le modèle suivant : le faisceau est constitué par une file d'électrons équidistants, tous situés sur l'axe Ox à l'état de repos. On applique au faisceau une petite perturbation transversale dans la direction Oy. On suppose cette perturbation sinusoïdale de longueur d'onde Λ dans le faisceau. Les coordonnées des électrons

s'écrivent

$$x = np, \qquad y = \delta \sin\frac{2\pi np}{\Lambda}, \qquad z = 0,$$

p étant la distance au repos entre électrons successifs.

Le champ agissant sur l'électron de rang m est alors

$$E_m = E_{ym} - \left[\sum_{n=-\infty}^{n=m-1} + \sum_{n=m+1}^{n=\infty}\right] \frac{e\,\delta\left(\sin\frac{2\pi mp}{\Lambda} - \sin\frac{2\pi np}{\Lambda}\right)}{4\pi\varepsilon_0\,|m-n|^3 p^3}$$

$$= -\frac{e\,\delta\sin\frac{2\pi mp}{\Lambda}}{2\pi\varepsilon_0}\sum_1^\infty \frac{1-\cos\frac{2\pi np}{\Lambda}}{n^3p^3}$$

en négligeant les termes non linéaires ceci donne pour l'équation du mouvement

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -eE = \frac{e^2 y}{\pi\varepsilon_0}\sum_1^\infty \frac{\sin^2\frac{\pi np}{\Lambda}}{n^3p^3}$$

d'où des mouvements de la forme

$$y = y_0\,e^{\pm\Omega t}, \qquad \text{avec} \quad \Omega^2 = \frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\sum_1^\infty \frac{\sin^2\frac{\pi np}{\Lambda}}{n^3p^3}.$$

Si, pour le même modèle, on calcule les oscillations longitudinales stables de plasma, on constate que Ω est lié à la pulsation de plasma réduite Ω_p par la relation $\Omega_p^2 = 2\Omega^2$.

Le cas général d'un faisceau de rayon non nul sera traité en considérant une perturbation de la forme $\delta r = \delta r_0\,e^{j(\theta-\Gamma z)} f(t)$. On suppose que la densité de charge à l'intérieur du faisceau demeure constante mais qu'il existe sur la surface du faisceau une couche de densité superficielle

$$\sigma = \rho_0\,\delta_{n(n=a)},$$

avec ρ_0 densité de charge et a rayon du faisceau. Dans ces conditions

$$\frac{\partial^2 \delta r(a)}{\partial t^2} = -\frac{\Omega_0^2}{2}\,\frac{I_1(\Gamma a)K_1(\Gamma a) + I_1(\Gamma a)K'_1(\Gamma a)}{I'_1(\Gamma a)K_1(\Gamma a) - I_1(\Gamma a)K'_1(\Gamma a)}, \qquad \text{avec} \qquad \Omega_0^2 = \frac{e}{m}\,\frac{\rho_0}{\varepsilon_0},$$

I_1 et K_1 fonctions de Bessel modifiées,

$$I'_1(z) = \frac{\partial I_1(z)}{\partial z}, \qquad K'_1(z) = \frac{\partial K_1(z)}{\partial z} \qquad (r, \text{ constante de propagation}).$$

Si le faisceau est animé d'une vitesse v_0, il en résulte un gain approximatif

(en népers par unité de longueur)

$$g = \frac{\Omega_0 \Gamma a}{2 v_0} \sqrt{L_n \frac{2}{\gamma \Gamma a}} \quad \text{pour} \quad \Gamma a < 1 \qquad (\gamma = 1,78),$$

$$g = \frac{0,28 \Omega_0}{v_0} \quad \text{pour} \quad 1 < \Gamma a < 3.$$

$$g = \frac{\Omega_0}{2 v_0 \sqrt{\Gamma a}} \quad \text{pour} \quad \Gamma a > 3.$$

Cette instabilité n'a guère pu jusqu'à présent être observée parce qu'elle est masquée par la dispersion statique du faisceau et parce que, dans de nombreux cas, la charge d'espace statique est partiellement ou même totalement compensée par la présence d'ions résiduels. Il semble cependant que ce phénomène soit la cause des anomalies décrites par Boersch (2) dans un cas particulier. Il s'agit d'un faisceau de microscope électronique pour lequel on a relevé une température d'agitation thermique très élevée (elle dépasse parfois 10 000 °K). Il est possible, grâce au type d'instabilité qui vient d'être étudié, d'expliquer au moins qualitativement tous les aspects des essais de Boersch. Il en résulte une nouvelle limitation du pouvoir séparateur dans les systèmes d'optique électronique.

(1) B. Epsztein, *Comptes rendus*, **242**, 1956, p. 1425.
(2) H. Boersch, *Z. Physik*, **139**, 1954, p. 115-146.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Discontinuités dans les courbes d'activation par réactions* $^{12}C(\gamma, n)^{11}C$ et $^{27}Al(\gamma, n)^{26}Al$. Note (*) de MM. **Robert Basile** et **Mark Gusakow**, transmise par M. Frédéric Joliot.

Certaines divergences dans les résultats concernant la réaction $^{12}C(\gamma, n)^{11}C$ [(1) à (4)] ayant été signalées, nous nous sommes proposé de vérifier ceux-ci.

L'étude a été faite avec le bètatron Brown-Boveri du Laboratoire de Synthèse atomique d'Ivry; les neutrons des réactions (γ, n) ont été détectés par des compteurs à BF_3 enrichis et le flux de photons mesuré à l'aide de la chambre d'ionisation C. I. P. E. G. (5) qui a déjà été utilisée pour les expériences faites avec le bètatron de Villejuif (6), (7), (8).

Nous servant de l'énergie du seuil de la réaction $^{12}C(\gamma, n)^{11}C$, très bien connue : $18,73 \pm 0,03$ MeV (9) comme étalonnage, nous avons trouvé une énergie maxima extrapolée pour le bètatron de $33,4 \pm 0,05$ MeV.

Nous avons ensuite observé des discontinuités aux énergies suivantes : $19,5 \pm 0,05$, $20,15 \pm 0,05$, $20,8 \pm 0,05$ et $21,4 \pm 0,05$ MeV.

Il est possible, mais nos mesures ne nous permettent pas de l'affirmer, qu'il y ait une discontinuité vers 19,1 MeV.

Ces résultats, avec les résultats antérieurs d'autres auteurs, sont résumés dans le tableau .

Discontinuités dans la courbe d'activation par réaction $^{12}C(\gamma, n)^{11}C$.

Katz et al. (1).	Spicer et Penfold (2).	Jamnik (3).	Basile et Gusakow.
19,3 ± 0,05 MeV	19,10 ± 0,05 MeV	19,14 ± 0,04 MeV	(19,1) MeV
19,8 ± 0,05 »	19,55 ± 0,05 »	19,60 ± 0,04 »	19,5 ± 0,05 »
20,1 ± 0,05 »			20,15 ± 0,05 »
20,5 ± 0,05 »			20,8 ± 0,05 »
20,7 ± 0,05 »			21,4 ± 0,05 »
21,1 ± 0,05 »			
21,6 ± 0,05 »			
22,4 ± 0,05 »			
22,8 ± 0,05 »			

La discontinuité à 22,8 MeV, signalée par Katz et al. (1), n'a pas été observée dans ce travail malgré une recherche spéciale, ce qui peut expliquer

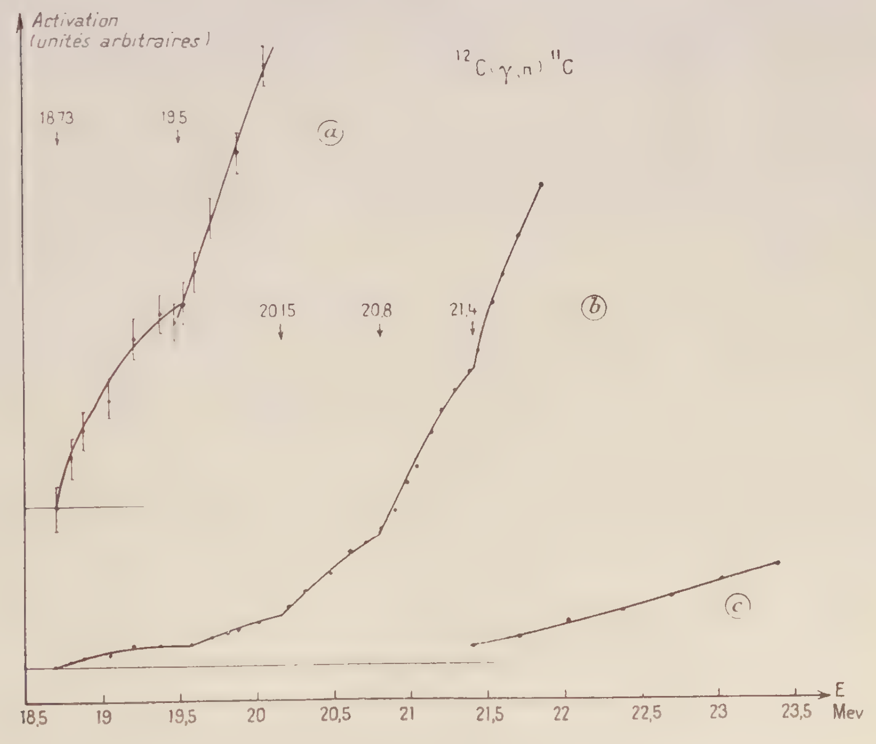


Fig. 1. — Courbe d'activation du carbone.
a, voisinage du seuil; *b*, discontinuités importantes; *c*, zone de 22,8 MeV.

le résultat négatif de l'expérience de C. Tzara (4). Il est possible que cette discontinuité ne corresponde pas à un niveau réel du noyau composé, mais que

son apparition soit provoquée par des effets de saturation sur les bêtatrons Allis-Chalmers à ces énergies très proches de leur énergie maximum.

Étude de l'aluminium. — Nous avons pu déterminer le seuil de la réaction $^{27}Al(\gamma, n)\,^{26}Al$ directement (*fig.* 2*a*) et par extrapolation de la droite représentant la racine carrée de l'activation en fonction de l'énergie (*fig.* 2*c*).

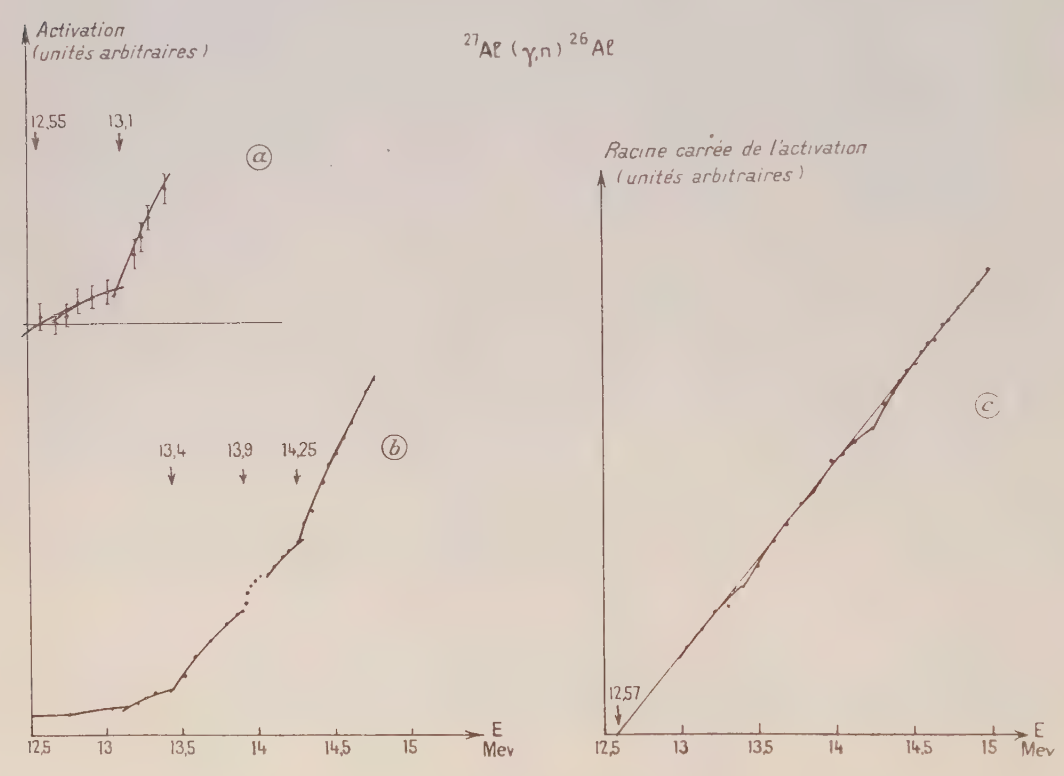


Fig. 2. — Courbe d'activation de l'aluminium.
a, voisinage du seuil; *b*, discontinuités; *c*, racine carrée de l'activation.

Les résultats sont concordants et nous avons obtenu $12,55 \pm 0,100$ MeV.

La valeur indiquée par Sher, Halpern et Mann ([10]) est $12,75 \pm 0,2$ MeV.

Cependant, les données les plus récentes sur les masses des noyaux ^{27}Al et ^{26}Al ([11]) conduisent à un seuil de $13,05 \pm 0,1$ MeV. La différence entre cette valeur et notre résultat expérimental est trop grande pour être dûe à des erreurs. Nous nous proposons d'étudier plus particulièrement le problème du seuil de l'aluminium pour essayer d'expliquer cette divergence.

D'autre part, nous avons observé des discontinuités dans la courbe d'activation aux énergies suivantes : $13,1 \pm 0,05$, $13,4 \pm 0,05$, $13,9 \pm 0,05$ et $14,25 \pm 0,05$ MeV, ce qui confirme et étend les résultats obtenus par l'un de nous (R. B.) sur ^{31}P et ^{35}Cl ([6]), ([7]), ([8]) au sujet des discontinuités dans les éléments moyens.

Là encore, nous n'avons pu observer aucune discontinuité dans les énergies élevées voisines du maximum de la résonance géante.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) L. Katz, R. N. H. Haslam, R. J. Horsley, A. G. W. Cameron et R. Montalbetti, *Phys. Rev.*, 95, 1954, p. 464.

(2) B. M. Spicer et A. S. Penfold, *Phys. Rev.*, 100, 1955, p. 1375.

(3) D. Jamnik, *Nuclear Instruments*, 1, 1957, p. 324.

(4) C. Tzara, *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 2340.

(5) C. Schuhl, *J. Phys. Rad.*, 17, 1956, p. 97 A.

(6) R. Basile et C. Schuhl, *Comptes rendus*, 240, 1955, p. 2399.

(7) C. Schuhl et R. Basile, *Comptes rendus*, 240, 1955, p. 2512.

(8) R. Basile, C. Schuhl et W. Sebaoun, *Comptes rendus*, 241, 1955, p. 387.

(9) F. Ajzenberg et T. Lautritsen, *Rev. Mod. Phys.*, 27, 1955, p. 77.

(10) R. Sher, J. Halpern et A. K. Mann, *Phys. Rev.*, 84, 1951, p. 387.

(11) J. Mattauch et F. Everling, *Progress in nuclear physics*, 6, p. 223, Pergamon Press, 1957.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sections efficaces d'absorption des particules de grande énergie par les noyaux et sections efficaces d'interaction avec les nucléons liés.* Note de M. **Georges Philbert**, présentée par M. Frédéric Joliot.

Le rôle de la distance d'interaction nucléaire dans la détermination théorique des sections efficaces d'absorption par les noyaux complexes est de nouveau discuté. D'autre part, l'étude des valeurs expérimentales permet de conclure provisoirement à une influence de la liaison sur les sections efficaces de diffusion inélastique par les nucléons individuels.

Dans une Note précédente (1) (désignée par I), nous avons discuté le mode de calcul des sections efficaces d'absorption des particules de grande énergie par les noyaux; nous avons également donné un certain nombre de résultats numériques. Depuis l'époque de parution de cette Note, les résultats ont été étendus au cas de nouveaux noyaux. D'autre part, la méthode utilisée a été reprise indépendamment par plusieurs auteurs; enfin des données expérimentales nouvelles ont été publiées. Il paraît donc utile de compléter le travail préliminaire.

1. Résultats numériques. — Les sections efficaces d'absorption σ_a ont été calculées (2) pour les noyaux ^{8}Be, ^{12}C, ^{40}Ca, ^{59}Co, ^{122}Sb, ^{209}Bi, (Br-Ag)^{93} et les sections élémentaires $\bar{\sigma}_b = (20\text{-}30\text{-}40\text{-}50\text{-}100\text{-}150).10^{-27}\ \text{cm}^2$ $[\bar{\sigma}_b = (A - Z)\sigma_n^b + Z\sigma_p^b$ où σ_p^b et σ_n^b représentent respectivement les sections efficaces élémentaires d'interaction avec un proton lié et avec un neutron lié]. Ces valeurs de σ_a sont utilisées dans la discussion du paragraphe 3.

2. Distance d'action des forces nucléaires. — La plupart des auteurs choisissent pour la fonction F représentant l'étendue du domaine d'interaction de

la particule incidente avec un nucléon qui apparaît dans la formule

$$\sigma_a = \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp\left[\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int \overline{\sigma}_b \, \mathrm{F}(\vec{r} - \vec{r'}) \, \rho(r') \, d^3(r') \right] \right\} 2\pi b \, db \qquad (3)$$

une fonction différente d'une fonction δ. Nous avions fait remarquer dans I que, si les particules incidentes sont des nucléons ou des pions, la distance d'action des forces nucléaires est contenue dans la répartition nucléonique déduite des expériences de Hofstadter; nous proposions donc de poser $\mathrm{F} = \delta$. D'après un travail récent de Chrétien et al., ([4]), le rayon définissant l'absorption ($r = 1,08 \cdot 10^{-13}$ cm) serait légèrement plus grand que celui se déduisant du rayon r. m. s. électromagnétique $\langle r \rangle_{\text{r. m. s.}} = 0,80 \cdot 10^{-13}$ cm. L'identification $\mathrm{F} = \delta$ ne serait donc pas rigoureuse; elle reste cependant une approximation suffisante dans le cas des interactions de pions et de nucléons. Au contraire, elle n'est probablement plus valable si les particules incidentes sont des antiprotons; une fraction seulement de la distance d'action des forces nucléon-antinucléon est contenue dans la répartition nucléonique : à savoir celle qui définit le rayon électromagnétique du proton.

3. Influence de la liaison sur la section efficace d'absorption par un nucléon. — 1° *Résultats expérimentaux.* — Nous avons attiré l'attention dans I sur le fait que la réduction par la liaison de la section efficace d'interaction d'une particule avec un nucléon due à l'interdiction de certaines collisions élastiques devait porter à la fois sur la probabilité de diffusion inélastique et sur celle de diffusion élastique. Les données expérimentales sont actuellement suffisamment nombreuses pour qu'un examen précis de cette question mérite d'être tenté. Les conclusions sont provisoires pour trois raisons : *a*. l'imprécision des données expérimentales; *b*. les difficultés du calcul exact du coefficient d'interdiction; *c*. la correction relative à l'effet de l'interaction coulombienne sur les valeurs des sections efficaces.

Nous avons porté dans le tableau II les sections efficaces d'absorption expérimentales et les sections efficaces d'interaction élémentaire $\overline{\sigma}_b$ de la particule incidente (pion ou nucléon) qui s'en déduisent. Dans le cas des particules chargées nous tenons compte de l'interaction coulombienne suivant la proposition de Cassels et de Courant :

$$\sigma_a^{\pm} = \sigma_a^0 \left(1 \mp \frac{Ze^2}{2\mathrm{R}p\beta} \right),$$

où $\sigma_a^{\pm}$ est la section efficace d'absorption d'une particule chargée positive (ou négative), σ_a^0 la section efficace d'absorption d'une particule neutre et R le rayon nucléaire classique ($\mathrm{R} = \mathrm{R}_0 \mathrm{A}^{1/3}$ avec $\mathrm{R}_0 = 1,3 \cdot 10^{-13}$ cm).

Les rapports $\overline{\sigma}_b / \overline{\sigma}_f$ ($\overline{\sigma}_f$ est la moyenne pondérée des sections efficaces d'interaction élémentaire avec un nucléon libre) sont dans presque tous les cas de l'ordre de 0,80. C'est à peu près le résultat que donne le calcul du coeffi-

cient d'interdiction pour les diffusions élastiques dans l'approximation, évidemment très insuffisante, d'un gaz de Fermi et d'un nucléon lié immobile. Les données relatives à l'absorption des pions négatifs de 1,5 BeV paraissent aberrantes. La raison en est peut-être que la section efficace d'interaction π^--neutron donnée dans la littérature est inexacte.

Le résultat suggère que l'hypothèse avancée précédemment doit être retenue : *l'absorption d'une particule de grande énergie par un nucléon lié est différente de celle de la même particule par un nucléon libre*, la différence entre les deux processus provenant de la modification introduite dans la figure de diffraction par la liaison.

TABLEAU I.

Valeurs de $\frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}_f}$.

Particule incidente.	Noyau.	$\sigma_a.10^{27}$ cm².	$\bar{\sigma}_b.10^{27}$ cm².	$\frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_f}$.
Protons 0,9 BeV (moyenne des résultats de Booth et et al. et de Chen et col).	^{8}Be	169	25	0,62
	^{12}C	220	34	0,85
	^{59}Co	697	31	0,78
	^{122}Sb	1 142	32,5	0,82
	^{209}Bi	1 680	37	0,94
Protons 2,8 BeV	^{12}C	221 ± 24	34	0,86
	^{59}Co	656 ± 97	26	0,65
	^{209}Bi	1 670 ± 110	31	0,78
Neutrons 1,5 BeV (Coor et col.)	^{8}Be	187	29	0,67
	^{12}C	201 ± 13	28,5	0,66
	^{59}Co	640 ± 30	24	0,55
	^{122}Sb	1 180 ± 60	33,5	0,77
	^{209}Bi	1 759 ± 50	39,5	0,91
Pions 1,5 BeV	^{12}C	248 ± 32	42	1,31
	^{59}Co	663 ± 81	26,5	0,81
	^{209}Bi	1 650 ± 148	29	0,90

Les résultats relatifs à ^{63}Cu et ^{207}Pb ont été rapportés à ^{59}Co et ^{209}Pb par extrapolation suivant une loi en $A^{2/3}$.

TABLEAU II.

Valeurs moyennes de $\frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_f}$.

Particule incidente.	p (0,9 BeV).	p (2,8 BeV).	n (1,5 BeV).	π^- (1,5 BeV).
$\frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_f}$	0,80	0,76	0,71	1,10

2° *Applications possibles à l'étude de la structure du nucléon.* — Si la liaison introduit une modification dans la valeur de la section efficace d'absorption, il apparaît possible qu'elle modifie le mécanisme d'absorption. Les effets de

l'absorption sont donc susceptibles de n'être pas les mêmes pour les nucléons libres et pour les nucléons liés ; ainsi les probabilités relatives de production de pions et de particules étranges, la probabilité de formation d'antiparticules pourraient dépendre de l'état de liaison du nucléon. De tels effets n'ont pas été jusqu'ici mis nettement en évidence, mais ils ne sont pas expérimentalement exclus : ainsi Segré ([5]) signale que les nucléons liés paraissent plus efficaces pour la production des antiprotons que les nucléons libres.

Un programme de recherches relatif à l'exploitation des idées émises comporterait :

a. Le calcul rigoureux de la figure de diffraction par un nucléon lié à partir de la figure expérimentalement obtenue pour un nucléon libre.

b. La détermination (peut-être à l'aide de modèles constitués par des sphères semi-opaques aux ondes électromagnétiques) de la géométrie du corps absorbant correspondant.

c. La mesure des probabilités de production des particules étranges, des antiparticules et des pions par les nucléons liés.

(1) G. Philbert, *Comptes rendus*, **244**, 1957, p. 1634.

(2) G. Philbert, Rapport intérieur, 1958.

(3) Nous rappelons les notations : b, paramètre d'impact ; s, coordonnée le long de la trajectoire de la particule incidente ; $\vec{r}$, $\vec{r'}$ rayons vecteurs rapportés au centre du noyau ; ρ, densité nucléonique.

(4) M. Chrétien, J. Leitner, N. P. Samios, M. Schwartz et J. Steinberger, *Phys. Rev.*, **108**, 1957, p. 383.

(5) E. Segré, *Congrès de Padova-Venezia* (septembre 1957).

CHIMIE PHYSIQUE. — *Dissociation de l'hexamésityldiplombane*. Note de MM. **Michel Lesbre**, **Jacques Satge** et **Daniel Voigt**, présentée par M. Paul Pascal.

Nous avons cherché à obtenir un hexaaryldiplombane plus fortement dissocié que les composés similaires étudiés jusqu'alors. L'hexamésityldiplombane, fortement coloré, ne révèle cependant qu'un taux de dissociation assez faible à l'état solide. Par contre, en solution, il se présente principalement sous forme de monomère.

La dissociation en radicaux libres des organométalliques de la quatrième famille appartenant au type $R_3M.MR_3$ a fait l'objet de nombreux travaux dont les conclusions paraissent assez divergentes. Les digermanes et *a fortiori* les disilanes ne sont pas dissociés en solution benzénique. Par contre, les distannanes où la liaison entre atomes métalliques est assez faible, paraissent fortement dissociés en solutions éthérée et benzénique. Des mesures cryoscopiques et ébullioscopiques ont donné un taux de dissociation de l'ordre de 50 % pour l'hexaéthyldistannane (éther) ([1])

et pour l'hexaphényldistannane (benzène) ([2]). Les mesures magnétiques donnent des taux de dissociation bien plus faibles ([3]).

La même contradiction apparaît lorsqu'on considère les diplombanes. Les mesures cryoscopiques faites sur l'hexaéthyl, l'hexacyclohexyl et l'hexaphényldiplombane ([4]), ([5]) en solutions benzéniques donnent un taux de dissociation important, du même ordre que celui des distannanes. Par contre, là encore les mesures magnétiques effectuées sur ces mêmes composés par Selwood et all. ([3]), ([6]) et Bähr et Zoche ([7]) ne permettent pas de conclure clairement à une dissociation. Cependant, Jensen et Clauson Kaas ([8]) par des mesures magnétiques sur des solutions benzéniques et chloroformiques d'hexacyclohexyldiplombane croient pouvoir conclure à une dissociation de l'ordre de 10 %.

Il nous a paru intéressant de rechercher si en augmentant l'encombrement stérique de la molécule de diplombane, une dissociation indiscutable pouvait être discernée par mesure magnétique. Nous avons donc préparé un composé dont l'encombrement stérique est assez considérable, l'hexamésityldiplombane, d'ailleurs fortement coloré, et nous en avons mesuré la susceptibilité magnétique. Ce composé

$$[2, 4, 6-(CH_3)_3C_6H_2]_3Pb-Pb[C_6H_2(CH_3)_3-2, 4, 6]_3$$

a été mentionné dans la littérature par Gilman et Bailie ([9]).

Partie expérimentale. — L'hexamésityldiplombane a été préparé par action du chlorure de plomb sur le bromure de mésitylmagnésium en atmosphère inerte. Un dépôt noir de plomb se forme au fond du ballon. Après hydrolyse le résidu solide est séché et traité par le chloroforme chaud. L'alcool précipite des solutions chloroformiques une poudre cristalline jaune qui se décompose au-dessus de 325°.

Analyse : $C_{27}H_{33}Pb$, calculé %, Pb 36,7; C 57,4; H 5,85; trouvé %, Pb 36,4; C 57,1; H 5,85.

La détermination des poids moléculaires a été effectuée à différentes températures :

a. Mesures cryoscopiques dans le benzène. Pour une solution à 0,233 %, au voisinage de la saturation, on a trouvé 596 (calculé pour le monomère 565);

b. Mesures ébullioscopiques dans le chloroforme et le benzène.

Solution chloroformique à 0,575 %, P.M. 650;

Solution benzénique à 0,860 %, P.M 631.

Le produit est donc très largement dissocié en solutions.

Par ailleurs, le comportement magnétique de l'hexamésityldiplombane a été étudié. Les mesures ont été effectuées par la méthode de Gouy-Pascal, la chute de potentiel magnétique de l'électroaimant étant de 50 000 gauss.cm. Les poussées ont été mesurées avec une balance spécia-

lement construite permettant d'apprécier 0,005 mg au moins. Les mesures sur le composé en solution sont impossibles en raison de sa trop faible solubilité. Les mesures sur le produit solide sont assez imprécises en raison des difficultés à obtenir un tassement à la fois très serré et parfaitement homogène. Nous avons trouvé

$$\chi_S = (-0,481 \pm 0,009).10^{-6} \text{ u. é. s.},$$

d'où

$$\chi_M = (-543 \pm 10).10^{-6} \text{ u. é. s.}$$

La susceptibilité théorique de la molécule dimère a été calculée d'après la nouvelle systématique de Pascal [10]. On obtient ainsi

$$\chi_{M_{\text{calc.}}} = -600.10^{-6} \text{ u. é. s.}$$

A partir de ces deux valeurs de χ_M, on peut calculer le taux de dissociation de l'hexamésityldiplombane à l'état solide. On trouve un chiffre de l'ordre de 2,3 %, mais avec un aussi faible pourcentage la précision des mesures ne permet guère de conclure de façon formelle à la présence de radicaux organoplombiques libres.

Par contre, les mesures cryoscopiques et ébullioscopiques indiquent un taux de dissociation considérable dans des solvants comme le benzène et le chloroforme, même à températures peu élevées.

(1) K. Rügheimer, *Annalen*, 53, 1909, p. 364.
(2) J. Boeseken et U. J. Rutgen, *Rec. Trav. chim. Pays-Bas*, 42, 1923, p. 1017.
(3) H. Morris et P. W. Selwood, *J. Amer. Chem. Soc.*, 63, 1941, p. 2509.
(4) E. Krause et G. Reissaus, *Berichte*, 54, 1921, p. 2060.
(5) E. Krause et G. Reissaus, *Berichte*, 55, 1922, p. 894.
(6) W. Selwood et R. Prekel, *J. Amer. Chem. Soc.*, 62, 1940, p. 2765.
(7) G. Bähr et G. Zoche, *Berichte*, 88, 1955, p. 542.
(8) K. A. Jensen et N. Clauson Kaas, *Z. anorg. Chem.*, 250, 1943, p. 278.
(9) H. Gilman et J. C. Bailie, *J. Amer. Chem. Soc.*, 61, 1939, p. 731.
(10) P. Pascal, A. Pacault et J. Hoareau, *Comptes rendus*, 233, 1951, p. 1078.

(*Faculté des Sciences*, 17, *rue Sainte-Catherine*, *Toulouse*.)

CHIMIE PHYSIQUE. — *Contribution à l'étude du diagramme d'équilibre fer-carbone. Solubilité du carbone dans le fer pur.* Note (*) de MM. **Paul Gendrel** et **Léon Jacqué**, présentée par M. Pierre Chevenard.

La limite de solubilité maximale du carbone dans le fer γ a été déterminée pour des échantillons de fer de pureté différente par des mesures de vitesse de réaction. Cette solubilité décroît quand le degré de pureté initial du métal augmente.

Deux Communications précédentes ont montré que l'étude cinétique, en

régime isotherme, des réactions de carburation et de décarburation de l'alliage fer-carbone dans une atmosphère méthane-hydrogène permettait de déterminer la solubilité maximale c_γ du carbone dans la phase austénite. L'apparition d'une phase nouvelle se manifeste :

a. soit par une variation de la vitesse quand la réaction est d'ordre zéro par rapport au carbone dissous : cas de la carburation d'un fer technique [1];

b. soit par une variation du coefficient de proportionnalité entre la vitesse et le taux de carbone en solution, quand cette réaction est d'ordre 1 : cas de la carburation d'un fer très pur et, d'une manière générale, de la décarburation dans l'hydrogène [2].

L'étude de ce phénomène entre 920° C et 1050° C a donné, pour chaque température, connue à $\pm 2°$ C, des valeurs de c_γ bien groupées, avec un écart maximal de 2,5 %. Ces valeurs ne sont pas influencées par la composition de la phase gazeuse carburante, au moins jusqu'à 5 vol % de CH_4 comme le montre, à tire d'exemple, la figure 1.

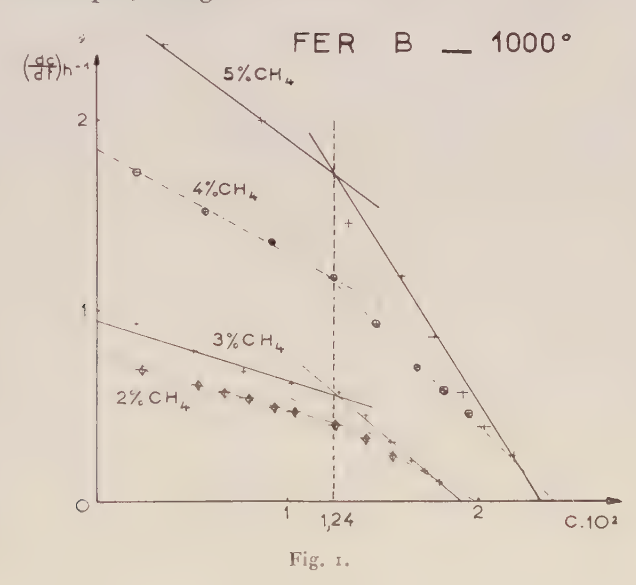


Fig. 1.

Sur la figure 2, les droites I_a, I_b représentent la vitesse d'accroissement de la concentration apparente d'un échantillon de fer pur soumis à la carburation isotherme à 995°, avec 4 % de CH_4.

Jusqu'à $c_\gamma = 1,16$ le carbone est dissous dans la phase austénite; au-dessus de cette concentration maximale, il y a dépôt superficiel de graphite.

L'échantillon ainsi carburé a été soumis à une décarburation par H_2 humide (0,8 % H_2O) à la même température; l'élimination du carbone est représentée par les droites II_b, II_a, faisant apparaître une valeur très voisine (1,19 %) de c_γ.

L'échantillon étant totalement décarburé est de nouveau soumis à la carburation donnant deux droites qui se confondent pratiquement avec I_a et I_b.

Une deuxième décarburation réalisée dans l'hydrogène sec donne $c_\gamma = 1,15$ (droites III_a, III_b).

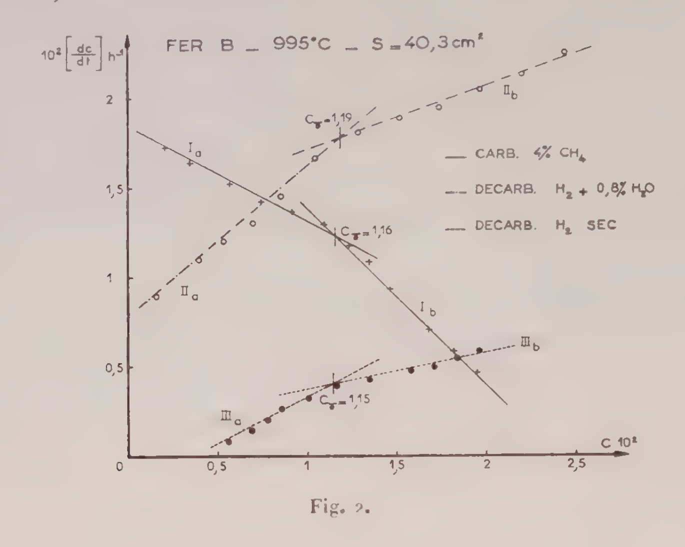


Fig. 2.

La concordance des valeurs trouvées pour c_γ dans ce double cycle semble établir que les réactions soient assez complètes pour que les traversées de la frontière du domaine austénique s'effectuent dans les deux sens dans des conditions voisines de la réversibilité et de l'équilibre.

Nous avons comparé par métallographie la structure des échantillons, soit après refroidissement lent, soit après trempe. Pour réaliser celle-ci dans l'enceinte contenant la phase gazeuse inflammable, un bain de gallium, maintenu à 35°, a été incorporé à la base de l'appareil. Le faisceau d'un arc focalisé sur une soudure du fil de suspension en provoque la fusion; l'échantillon tombe dans le bain de moindre densité que l'acier. En aucun cas, nous n'avons décelé de cémentite primaire précipitée après saturation de la solution solide. Par contre, à partir du taux de carbone c_γ de saturation, on voit apparaître sur la surface des taches de graphite qui vont en se développant jusqu'à la recouvrir entièrement. On doit donc admettre que l'austénite est en équilibre avec le graphite.

La frontière d'équilibre entre austénite et austénite + graphite a été ainsi établie pour cinq aciers différents dont les teneurs initiales en impuretés sont données ci-dessous (en parties par million).

Qualité.	C.	Si.	P.	S.	Cu.	Mn.	Ni.	O_2.	Divers.
A et B...	25	10	≤ 20	≤ 20	≤ 2	≤ 15	140	36	Al ≤ 20 ; Zr, Na, Ca, Mg ≤ 10
C.......	300	–	60	90	1050	420	800	380	Autres élements non dosés
D.......	20	15	–	30	10	Traces	20	650	Al 10
E.......	850	700	200	280	1600	4300	960	Non dosé	Al 740

Les courbes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de la figure 3 correspondent respectivement aux nuances *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Les nuances *A* et *B* sont des fers très purs, de même origine mais de coulées différentes. La qualité *A* est probablement plus pure, bien que l'analyse n'ait pu y déceler de différences sensibles.

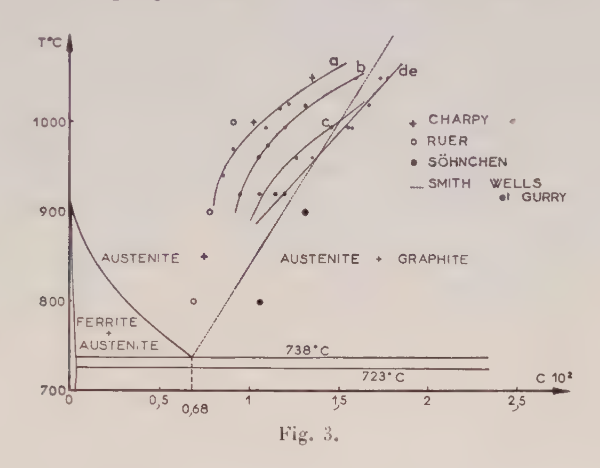


Fig. 3.

La courbe *c* est celle précédemment établie avec un fer de même qualité que le fer *c*.

Les courbes *d* et *e* sont approximativement confondues. Nous avons en outre figuré quelques points d'équilibre de l'austénite avec le graphite, relevés dans la littérature. Il est vraisemblable que la dispersion des résultats obtenus par différents auteurs découle soit de techniques pouvant mettre en jeu des réactions incomplètes ou affectées d'hytérésis, soit des différences de pureté de l'alliage. Il semble toutefois qu'au fur et à mesure que la composition de l'alliage s'écarte du fer pur, pour tendre vers celle des fers techniques courants, la frontière se rapproche de la droite moyenne correspondant aux nombreux résultats expérimentaux publiés par la plupart des auteurs. La régression de la solubilité du carbone dans le fer γ de pureté croissante, semble être en bon accord avec les résultats relatifs à la solubilité des gaz dans le fer pur [3].

(1) G. Collette et L. Jacqué, *Comptes rendus*, 236, 1953, p. 1267.

(2) G. Collette, P. Gendrel et L. Jacqué, *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 419.

(3) R. Sifferlen, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1192; S. Besnard et J. Talbot, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1193.

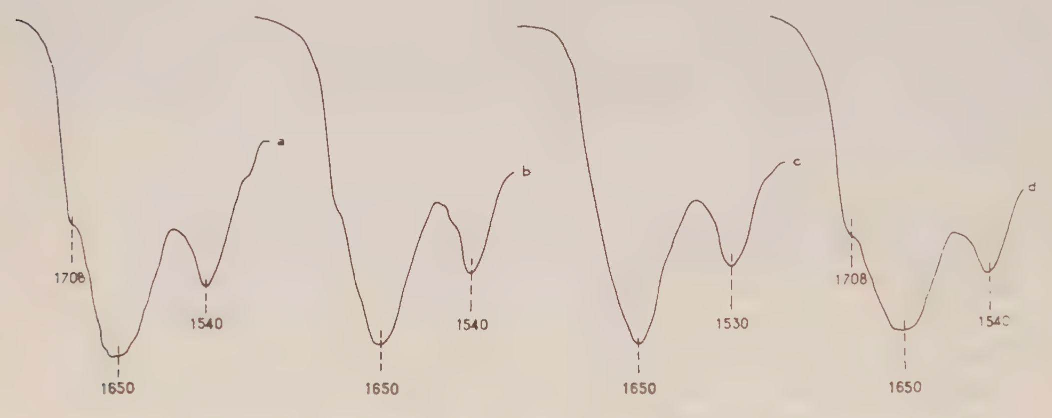
CHIMIE PHYSIQUE. — *Effet de l'hydratation sur les spectres infrarouges de nucléohistone*. Note (*) de Mlle **Christiane de Lozé**, présentée par M. Louis Hackspill.

Le spectre de la nucléohistone présente d'intéressantes variations en fonction du degré d'hydratation des préparations.

La nucléohistone, extraite à partir du thymus de Veau, par la méthode de Crampton, Lipshitz et Chargaff [1], est examinée à l'état de films. Ces films peuvent être exposés à des atmosphères d'humidités relatives variables, à l'aide d'un dispositif convenable [2].

Lorsque l'humidité relative est égale à 100 %, le spectre comporte (courbe *a*) une bande forte à 1650 cm^{-1}, un épaulement bien marqué à 1708 cm^{-1} et une bande moyenne à 1540 cm^{-1}.

Si l'on déshydrate progressivement le film, l'épaulement à 1708 cm^{-1} devient de moins en moins distinct et disparaît complètement lorsque l'humidité relative est inférieure à 10 %. En outre, la bande 1540 cm^{-1} se déplace à 1530 cm^{-1} (courbes *b* et *c*).



Nucléohistone extraite par les solutions de faible force ionique. Effet de l'hydratation sur les films.

a. Film exposé à une atmosphère à 100 % d'humidité relative.
b. » *a* » » 60 % » »
c. » *b* » » moins de 10 % d'humidité relative.
d. » *c* réhydraté dans une atmosphère à 100 % » »

Le phénomène est parfaitement réversible : si, après dessiccation totale, on réhydrate le film, on voit réapparaître l'épaulement à 1708 cm^{-1} et la bande 1530 cm^{-1} reprend sa place à 1540 cm^{-1} (courbe *d*).

Les bandes qui dominent le spectre de la nucléohistone à 1650 et 1540 cm^{-1} sont caractéristiques de la liaison peptidique dans les protéines. Il semble donc raisonnable de les attribuer à l'histone. L'acide nucléique, qui présente également une bande à 1650 cm^{-1}, participe certainement à l'absorption observée à cette fréquence mais, son coefficient d'absorption étant notablement plus faible que celui des protéines en général, il n'est pas douteux que la bande en question est principalement due à la fraction protéique de la molécule.

Les fréquences des bandes 1650 et 1540 cm^{-1} correspondent à une disposition en α des chaînes peptidiques. L'histone présente donc vraisemblablement cette structure dans la nucléohistone comme à l'état isolé [3].

L'épaulement situé à 1708 cm^{-1} dans le film exposé à une humidité relative de 100 % n'a pas été observé dans le spectre des protéines. Il est à la même fréquence que la bande de l'acide désoxyribonucléique qui caractérise la structure B [2]. Rappelons que la déshydratation de l'acide désoxyribonucléique (DNA) et son passage en forme A se traduisent par le déplacement de cette bande à 1690-1685 cm^{-1}. On peut penser qu'il se produit le même phénomène lorsqu'on déshydrate la nucléohistone : la bande 1708 cm^{-1}, en se déplaçant vers les fréquences plus basses, est progressivement masquée par la forte absorption due à la protéine. Pour une hydratation moyenne, elle est encore visible sous la forme d'un épaulement vers 1700 cm^{-1}, et elle disparaît complètement à l'état sec.

Dans la nucléohistone, le DNA semble donc pouvoir passer réversiblement de la forme B à la forme A comme s'il était isolé.

La variation de la bande 1540 cm^{-1} avec l'hydratation est difficile à interpréter actuellement. Elle a également été observée dans le cas de l'histone isolée [4], et indique vraisemblablement une interréaction eau-liaison peptidique de la protéine.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) C. F. Crampton, R. Lipshitz et E. Chargaff, *J. Biol. Chem.*, **206**, 1954, p. 499.

(2) H. Lenormant et C. de Lozé, *Bull. Soc. Chim.*, 1955, p. 1501.

(3) C. de Lozé, *Comptes rendus*, **246**, 1958, p. 417.

(4) C. de Lozé, *Thèse de Sciences* (sous presse).

ÉLECTROCHIMIE. — *Sur les caractéristiques de la décharge par étincelle cathodique entre une solution électrolytique et une cathode métallique.* Note (*) de M. Ahmad Banège-Nia, présentée par M. Eugène Darmois.

Dans une précédente Note [1], nous avons décrit notre dispositif expérimental et exposé quelques particularités de ces décharges; nous nous proposons de donner quelques réseaux de caractéristiques dans ce qui suit.

Nous avons constaté que, d'une part, la forme des caractéristiques d'une décharge par étincelle dépend de celle de la figure d'impact et que, d'autre part, pour la même figure d'impact les grandeurs qui représentent les caractéristiques varient avec la concentration et la température du bain.

La figure d'impact sur la cathode comme sur la surface de la solution selon les cas, peut être une figure ponctuelle, plusieurs figures ponctuelles distinctes ou bien un réseau de courbes. Lorsque la figure d'impact sur la cathode est ponctuelle, celle qui se trouve sur la surface de la solution a la forme d'un disque circulaire dont le diamètre est de l'ordre de plusieurs millimètres; il augmente lorsque la concentration de la solution anodique diminue et pour la même intensité du courant, il augmente avec la longueur

de l'étincelle. Ce disque contient dans son plan un certain nombre de petits cercles de couleur violette situés sur les contours des cercles centrés sur le centre de la figure d'impact; les petits cercles ayant une couleur alternativement claire et obscure donnent à la figure d'impact l'aspect d'une roue dentée; ils sont animés d'une manière désordonnée d'un mouvement : soit de rotation indifféremment dans un sens ou dans l'autre avec une vitesse angulaire variable, soit d'oscillations autour d'une position d'équilibre; il arrive parfois qu'ils soient immobiles.

Lorsque la figure d'impact est un réseau de courbes, les courbes aussi bien sur la cathode que sur la surface de la solution sont constituées par la mise côte à côte des figures d'impact ponctuelles décrites plus haut, elles seraient la trajectoire de l'impact ponctuel; on obtient en particulier lorsque la surface de la cathode est très convenablement polie et la densité du courant suffisante des courbes très régulières ayant la forme de différentes variétés de belles rosaces comme celle que représente la figure 1.

L'obtention de l'une des trois sortes de figures d'impact dépendrait de l'état de polissage de la cathode, de la densité du courant, de la longueur de l'étincelle et aussi de la concentration de la solution pour les figures d'impact composées de plusieurs figures ponctuelles.

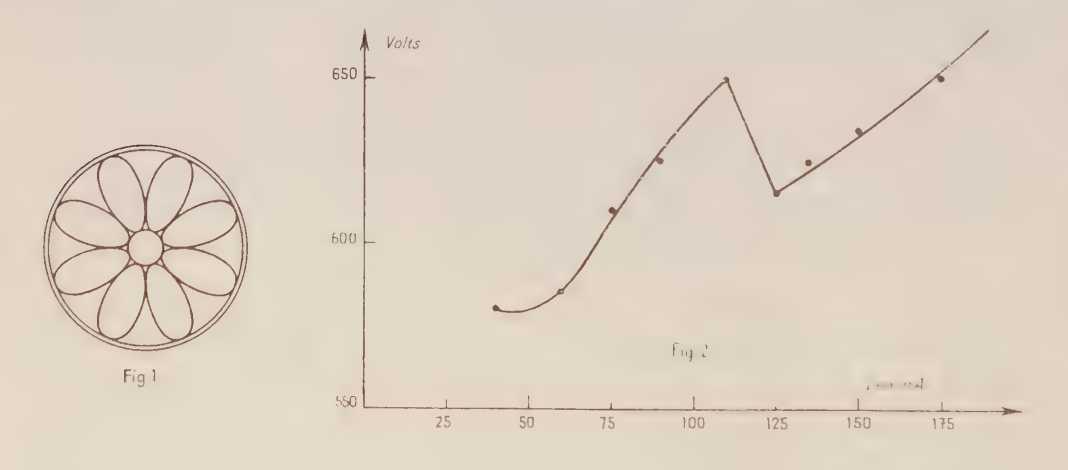
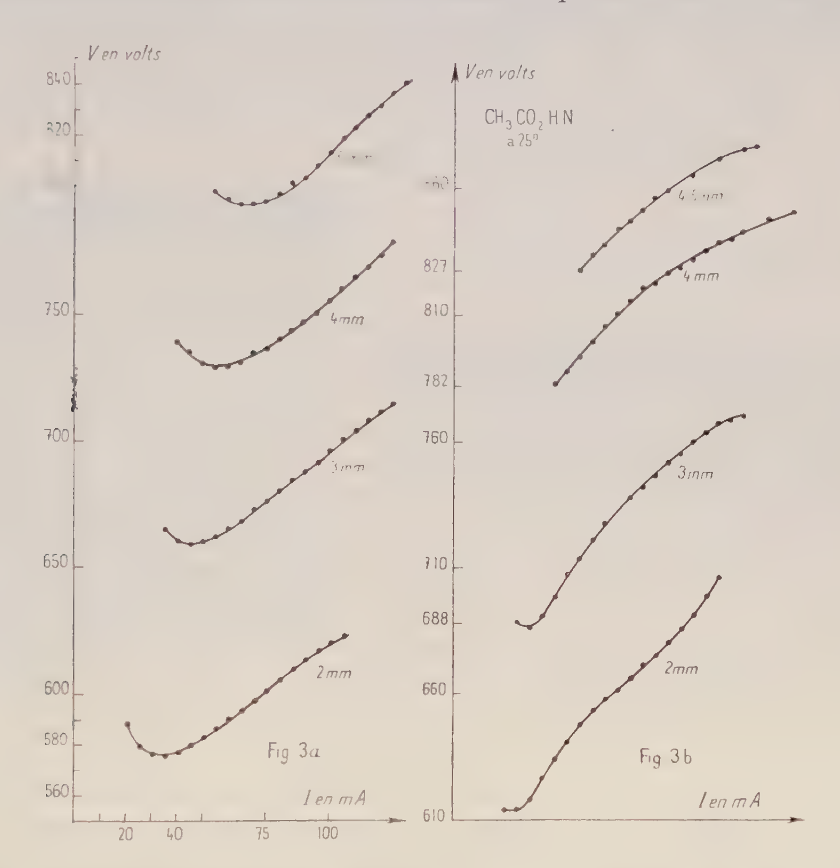


Fig 1
Fig 2

Lorsque l'étincelle est courte (de l'ordre de 1 mm) et l'intensité du courant assez élevée (de l'ordre de 100 mA) la figure d'impact est un réseau de courbes et les caractéristiques correspondantes sont des droites très légèrement inclinées (presque horizontales) analogues aux caractéristiques de la décharge par arc [1] bien que l'aspect apparent de cette décharge soit totalement différent. (On obtiendrait les mêmes figures d'impact avec des étincelles plus longues et des intensités du courant plus élevées.)

Dans le cas des solutions très diluées (ClH N/1 000 par exemple) où généralement on obtient une figure d'impact ponctuelle dans nos conditions

expérimentales, on remarque que pour une longueur d'étincelle donnée lorsqu'on augmente l'intensité du courant, à partir d'une certaine intensité un ou parfois plusieurs autres points de la cathode sont frappés par de nouvelles étincelles rigoureusement identiques à la première. L'apparition de chaque nouvelle étincelle est accompagnée d'une diminution brusque d'une cinquantaine de volts de la différence de potentiel entre les électrodes



et d'une augmentation d'une vingtaine de milliampères de l'intensité du courant. Après cette discontinuité de la caractéristique si l'on continue à augmenter la tension le courant augmentera, la portion de la caractéristique volts-ampères sera parallèle à celle qu'elle aurait été s'il n'y avait pas eu de nouvelles étincelles et la caractéristique sera une courbe continue jusqu'à l'apparition d'une nouvelle étincelle (*fig.* 2).

En se plaçant dans nos conditions expérimentales, on obtient en général (sauf pour les cas particuliers qui ont été décrits plus haut) une figure d'impact ponctuelle. Nous donnons sur la figure 3 les caractéristiques de la décharge par étincelle (figure d'impact ponctuelle) dans l'air sous la pression atmosphérique pour les solutions de Cl H N/100 prise à 25° (*fig.* 3 *a*) et CH_3 CO_2 H N à 25° (*fig.* 3 *b*), les longueurs d'étincelles allant de 2 à 5 mm.

Les limites inférieure et supérieure dans lesquelles ces caractéristiques ont été tracées ne sont pas les limites réelles de l'existence de la décharge, elles correspondent à celles dans lesquelles nous avons réussi à obtenir d'une manière fixe la figure d'impact désirée; en particulier la limite inférieure du courant dépend de l'impédance du circuit et de la longueur de l'étincelle et il semble que les caractéristiques continuent à être ascendantes au-delà de la limite supérieure du courant qui est ici de l'ordre de 125 mA.

(*) Séance du 13 janvier 1958.

(1) A. Banège-Nia, *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 1421.

MÉTALLOGRAPHIE. — *Sur la constitution et la morphologie de la pellicule d'oxydation superficielle du fer dans la vapeur d'eau aux températures élevées.* Note (*) de MM. **Jean Païdassi** et **David Fuller**, présentée par M. Georges Chaudron.

L'oxydation du fer dans la vapeur d'eau a déjà fait l'objet de plusieurs travaux parmi lesquels il faudrait citer ceux de Marson et Cobb [1], de Upthegrove et Murphey [2], de Heindlhofer et Larsen [3] et de Tikhomiroff et de ses collaborateurs [4]. Cependant en vue des résultats contradictoires obtenus par ces auteurs, nous avons considéré désirable de reprendre l'ensemble de la question. Dans cette communication nous nous proposons d'exposer nos résultats relatifs à l'intervalle 700-1250° C.

Les échantillons constitués par des plaquettes de quelques centimètres carrés de surface de fer Armco ou de fer dénommé « Puron » par la Westinghouse, étaient soumis à une préparation soignée déjà décrite ailleurs en détails [5]. Ils étaient oxydés dans un four dans le tube laboratoire duquel on pouvait réaliser un vide inférieur à 10^{-3} mm Hg, ce qui permettait de réaliser l'oxydation dans de la vapeur d'eau exempte de toute trace d'oxygène. La vapeur produite dans un bain thermostatique était entraînée par un courant d'argon purifié et circulait dans la région occupée par l'échantillon avec une vitesse d'environ 3 cm/s. Celui-ci, après refroidissement dans la partie froide du tube laboratoire était soumis à un examen métallographique par les techniques déjà décrites [5]. Cet examen a permis d'établir les faits suivants :

1° La pellicule, quelles que soient les conditions de l'essai, est très adhérente à son support métallique même si au lieu du fer pur on met en œuvre du fer Armco. Ceci montre, compte tenu des résultats que nous avons obtenus sur l'oxydation de ce dernier dans l'air [6], que l'adhérence de la pellicule au métal est très différente selon l'atmosphère oxydante utilisée.

2° La pellicule d'oxydation est constituée par une seule couche de protoxyde de fer, sauf dans l'intervalle 900-920° C où pour des durées d'oxydation supérieures à 6 h apparaît une couche externe discontinue de magnétite.

3° Les pellicules formées dans l'intervalle 650-750° C présentent en coupe des aiguilles comme le montre la figure 1 (G : 750) qui correspond à une plaquette de fer oxydée dans la vapeur d'eau à 700° C pendant 24 h. Ces aiguilles résultent très vraisemblablement de la transformation martensitique du protoxyde de fer au cours de son refroidissement [7].

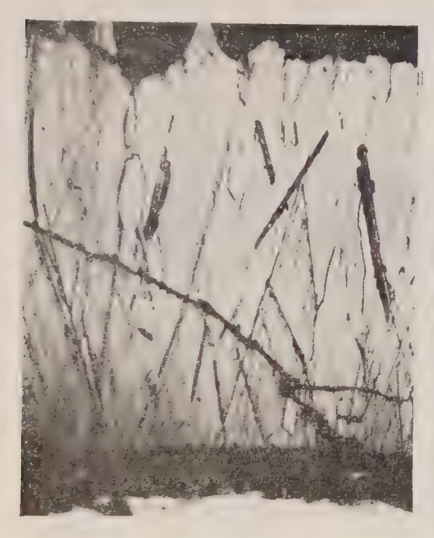


Fig. 1.

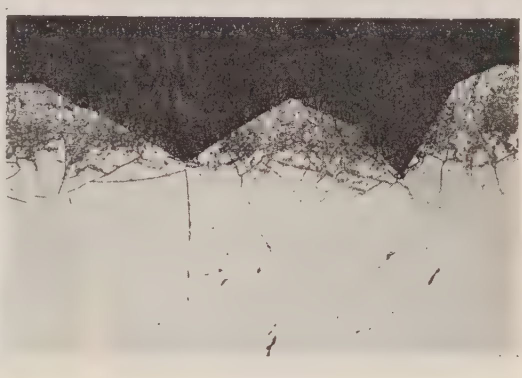


Fig. 2.

4° L'interface FeO-H_2O présente un caractère déchiqueté, comme le montre la figure 2 (G : 135) qui correspond à un échantillon oxydé à 900° C pendant 6 h. On remarque de plus que les avancées internes de cette interface correspondent aux joints de grains du protoxyde de fer, ce qui étend au cas de l'oxydation du fer dans la vapeur d'eau les observations faites et l'interprétation donnée dans l'étude de l'oxydation du fer dans l'air [8]. Enfin on constate une croissance à caractère idiomorphe des grains de FeO à la surface de l'échantillon. Ce fait doit être vraisemblablement attribué à l'action conjuguée d'une basse tension superficielle du protoxyde en atmosphère de vapeur d'eau et d'une diffusion superficielle considérablement plus rapide que la diffusion en volume dans les cristaux.

5° A la limite inférieure de l'intervalle considéré on observe dans le cas du fer Armco une oxydation intergranulaire du fer support qui disparaît vers 800° C. La figure 3 (G : 150) montre ce phénomène sur un échantillon

oxydé à 700° C pendant 12 h. Si l'on exclut cette particularité la zone de l'interface Fe-FeO a les caractères analogues à ceux décrits par Chaudron et ses collaborateurs [9], [10], [11] dans le cas de l'oxydation du fer dans les mélanges H_2O-H_2.

6° La morphologie de la magnétite superficielle de la pellicule est très particulière comme le montre la figure 4 (G : 600) et son étude détaillée montre que la couche croît latéralement à partir d'un nombre réduit de germes. Ceci met en évidence la généralité du phénomène découvert par Bénard et Bardolle [12] dans des conditions opératoires très différentes.

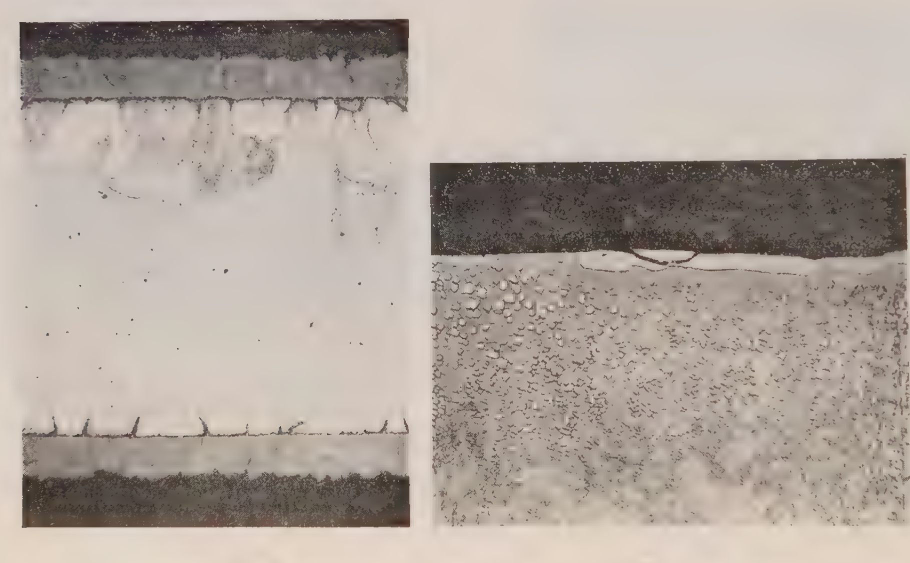


Fig. 3. Fig. 4.

7° Lorsque les pellicules ont été obtenues à des températures supérieures à 800° C, on observe, dans la zone externe de la couche de FeO une précipitation fine d'oxyde Fe_3O_4. La morphologie de la couche mixte ainsi constituée est analogue à celle déjà décrite de la pellicule d'oxydation du fer dans l'air [5]. Il y a lieu de remarquer que la bande étroite d'oxyde FeO exempt de précipité n'apparaît que lorsque la pellicule comporte une couche superficielle de Fe_3O_4 (*fig.* 4), ce qui confirme d'ailleurs l'interprétation que nous en avons donnée [5]. Enfin, la limite inférieure de la couche mixte qui est une surface d'égale concentration en oxygène dans le protoxyde est parallèle à l'interface Fe-FeO, ce qui montre que le gradient de concentration qui règne dans la pellicule est indépendant des irrégularités de l'interface FeO-H_2O et que, par conséquent, il n'y a pas diffusion préférentielle aux joints de grains de la pellicule au cours de sa croissance.

(*) Séance du 20 janvier 1958.
(1) C. B. Marson, H. T. Angus et J. W. Cobb, *J. Soc. Chem. Ind.*, Londres, **46**, 1927, p. 61 T.
(2) C. Upthergrove et D. W. Murphey, *Trans. Amer. Soc. Steel Treat.*, **21**, 1933, p. 73.
(3) K. Heindlhoffer et B. M. Larsen, *Trans. Amer. Soc. Steel Treat.*, **21**, 1933, p. 865.
(4) Tikhomirov, Ipatev et Gofman, *Doklady Akademii Nauk* U. R. S. S., **95**, 1954, p. 305.
(5) J. Païdassi, *Rev. Mét.*, **52**, 1955, p. 869 et *Acta Met.*, **3**, 1955, p. 447.
(6) J. Païdassi, *Rev. Mét.*, **54**, 1957, p. 569.
(7) R. Collongues, *Thèse*, Paris, 1954 et (9).
(8) J. Païdassi, *Thèse*, Paris, 1954 et *Comptes rendus* (à paraître).
(9) R. Collongues, R. Sifferlen et G. Chaudron, *Rev. Mét.*, **50**, 1953, p. 727.
(10) R. Sifferlen et R. Collongues, *Comptes rendus*, **238**, 1954, p. 2167.
(11) R. Sifferlen et F. Bourelier, *Rev. Mét.* (sous presse).
(12) J. Bénard et Bardolle, *Comptes rendus*, **232**, 1951, p. 2317.

MÉTALLOGRAPHIE. — *Sur la localisation intergranulaire du soufre dans le fer pur chargé en hydrogène cathodique en présence de sulfure de sodium.* Note de Mlle **Simone Besnard** et M. **Jean Talbot**, présentée par M. Georges Chaudron.

Dans une Note précédente (1), nous avons signalé que les joints intergranulaires du fer électrolytique chargé en hydrogène cathodique en présence de sulfure de sodium présentaient à la micrographie une attaque caractéristique que nous avons attribuée à la présence de soufre dans le métal. Nous avons repris ces expériences en utilisant du soufre radioactif.

Le fer électrolytique est chargé dans une solution d'acide sulfurique 10 N dans laquelle on a ajouté du sulfure de sodium à la concentration N/100. Le soufre 35 a une période de 87 jours. Il émet un rayonnement β de 0,167 MeV.

Des polissages électrolytiques permettent d'atteindre différents niveaux de l'échantillon où l'on mesure l'activité du soufre.

La technique autoradiographique nous a permis de localiser la présence du soufre. Après polissage, les plaquettes ont été placées entre deux pellicules photographiques, et le contact a été maintenu pendant trois semaines environ. Le noircissement des films est dû au rayonnement émis par le soufre 35. Les différentes autoradiographies qui ont été faites dans ces conditions montrent l'existence de taches organisées en contours. Nous avons cherché à voir s'ils étaient en relation avec les joints de grains du métal. Les échantillons ont donc été attaqués au nital, puis photographiés à faible grossissement. La figure 1 représente la macrographie d'une région de l'échantillon au grossissement 13 et à une profondeur de 10 μ environ. La figure 2 montre, au même grossissement, l'autoradiographie effectuée sur la même partie de l'échantillon et au même niveau. On constate que les

contours observés sur l'autoradiographie et ceux des joints de grains du métal sont exactement superposables.

Les zones noires que l'on observe en bas et à gauche sur l'autoradiographie se trouvent à l'aplomb des soufflures.

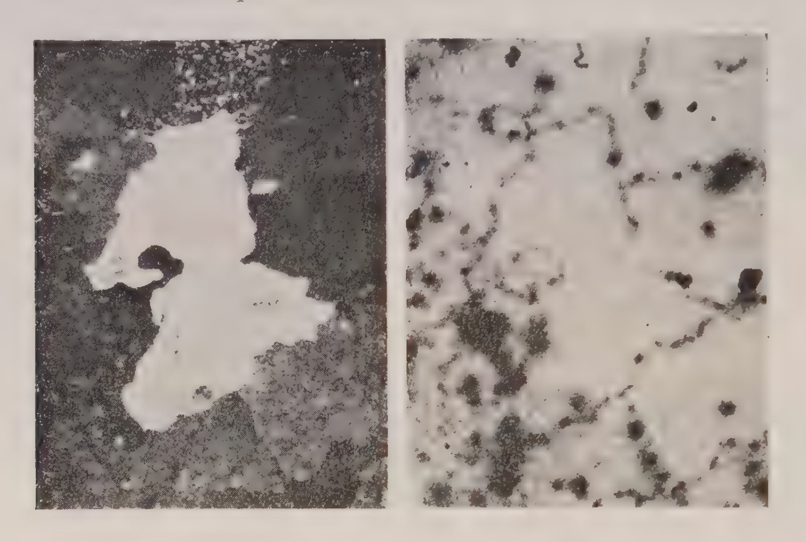


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 1. — Macrographie d'une région de l'échantillon (× 13).

Fig. 2. — Autoradiographie effectuée sur la même partie de l'échantillon (× 13). Mise en évidence du soufre 35 dans les joints intergranulaires.

Ces expériences mettent en évidence la pénétration du soufre à l'intérieur du fer, ainsi que sa précipitation ou sa diffusion préférentielle aux joints de grains, ce qui permet d'expliquer le comportement tout à fait particulier du fer chargé en hydrogène cathodique en présence de soufre. De plus, l'hypothèse émise par E. Herzog [2] sur la fragilité des aciers qui se corrodent intergranulairement en présence de soufre dans les solutions d'attaque paraît donc être confirmée par ces expériences.

(1) S. Besnard, R. Santini et J. Talbot, *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 965.

(2) E. Herzog, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1499.

(Laboratoire de Vitry du C.N.R.S.)

PHYSICOCHIMIE MACROMOLÉCULAIRE. — *Étude de la dépolymérisation thermique de la cellulose*. Note (*) de MM. **Adolphe Pacault** et **Georges Sauret**, présentée par M. Paul Pascal.

On fait une étude systématique de la dépolymérisation thermique de la cellulose à l'abri de l'air. On constate que la dépolymérisation est une réaction d'ordre zéro et tend, quelle que soit la température à laquelle elle a lieu, vers une limite pour laquelle le degré de polymérisation D. P. est de l'ordre de 300. L'énergie d'activation de la réaction de dépolymérisation est de 25,8 kcal.

La dépolymérisation thermique de la cellulose à l'abri de l'air, qui n'a pas encore fait l'objet d'un Mémoire d'ensemble, a été suivie par la méthode viscosimétrique. Des échantillons de linters possédant les caractéristiques suivantes [indice du cuivre (Braidy), 0,12; viscosité (Obst), 126; D. P., 1360; cendres, 0,6 %; humidité, 5,6 %] ont été maintenus sous vide aux températures de 170, 186, 202 et 230°.

Pour chaque isotherme, on a déterminé la viscosité de solutions dans la cupriéthylène-diamine d'échantillons de linters prélevés en fonction du temps. Le degré de polymérisation moyen $\overline{DP}_v$ a été calculé par la formule de Govaerts-Smets :

$$\overline{DP}_v = \frac{\eta_{sp} \cdot 10^3}{C\left(1 + 0.25\eta_{sp} - \dfrac{\eta_{sp}^2}{150}\right)7,5};$$

η_{sp}, viscosité spécifique;

C, concentration de la cellulose dans le solvant viscosimétrique en grammes pour 100 ml.

Les courbes (figure 1) représentent les différents isothermes $\overline{DF}_v = f(\text{temps})$.

Quelle que soit la température, on constate que le degré de polymérisation de la cellulose tend vers une limite égale à environ 300, résultat numérique en bon accord avec ceux obtenus par dépolymérisation hydrolytique hétérogène ([1]), ([2]), ([3]), ([4]), ([5]).

L'étude cinétique montre par ailleurs que la dépolymérisation est une réaction d'ordre zéro.

En effet, le nombre de liaisons n rompues au cours de la dépolymérisation a pour expression

$$n = \frac{\overline{DP}_0}{\overline{DP}_n} - 1.$$

$\overline{DP}_0$, degré de polymérisation initial;

$\overline{DP}_n$, degré de polymérisation lorsque n liaisons ont été rompues;

d'où

$$n = \frac{[\Phi_n]}{[\Phi_0]} - 1,$$

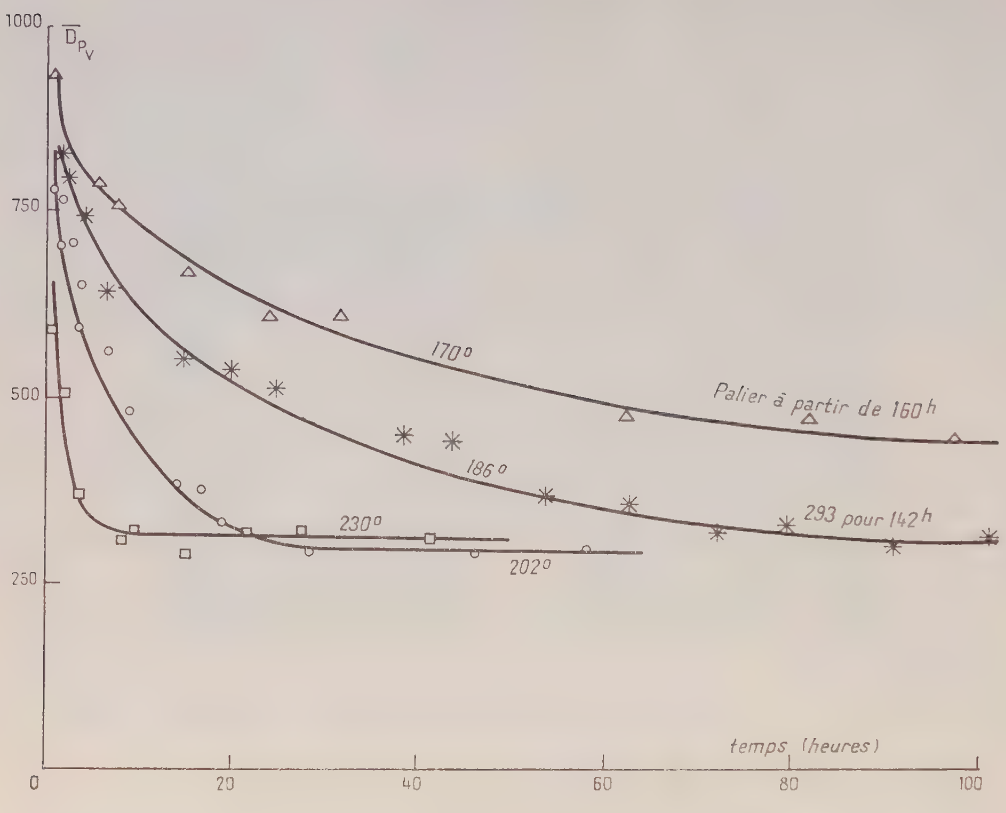
$[\Phi]$, fluidité intrinsèque initiale;

en admettant que le degré de polymérisation est inversement proportionnel à la fluidité intrinsèque.

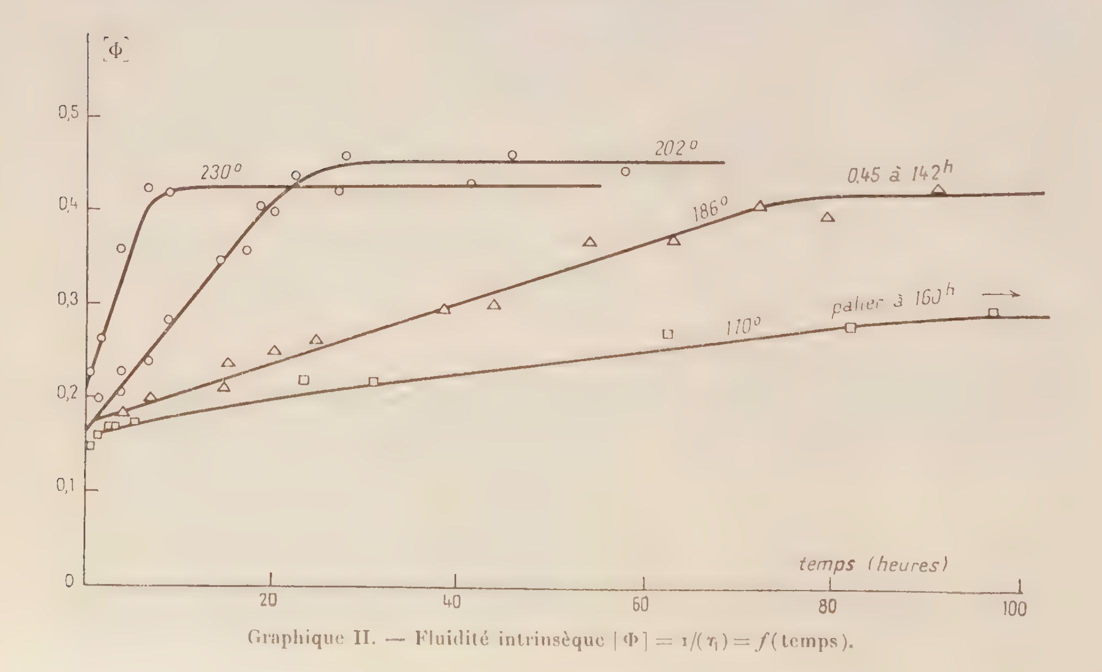
D'où

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{[\Phi]}\frac{d[\Phi_n]}{dt}.$$

Or, les courbes expérimentales 2 montrent que Φ_n est une fonction linéaire du temps; la dépolymérisation est donc une réaction d'ordre zéro, résultat



Graphique I. — Degré de polymérisation $= f$(temps).
$\overline{DP}_v = f$(heures).



Graphique II. — Fluidité intrinsèque $[\Phi] = 1/(\eta) = f$(temps).

aisément confirmé par l'étude systématique des résultats numériques grâce à la méthode différentielle classique.

Les constantes de vitesse k_0 de la réaction de dépolymérisation ($dn/dt = k_0$) sont :

T (°C)	170	186	202	230
$k_0 . 10^3$ (mn^{-1})	0,13	0,31	1,23	4,2

L'application de la formule d'Arrhénius aux différents isothermes permet de fixer l'énergie d'activation de la réaction à 25,8 kcal.mole^{-1}.

Les résultats précédents conduisent à penser que cette dépolymérisation est liée à l'hétérogénéité de la cellulose. Les liaisons, thermiquement rompues, sont en nombre limité et se situent aux confins des parties amorphes et cristallisées de la chaîne cellulosique.

La longueur moyenne d'un cristallite et d'une partie amorphe contiguë est donc d'environ 1500 Å, puisque le degré de polymérisation limite est de 300.

Sous l'influence de la chaleur, ces liaisons se rompent au hasard, la rupture de l'une étant sans influence sur la rupture des autres, mécanisme qui est bien conforme à celui d'une réaction d'ordre zéro.

A des températures supérieures à 230°, une réaction de cracking se superpose à la dépolymérisation et l'analyse des produits obtenus fera l'objet d'une publication ultérieure.

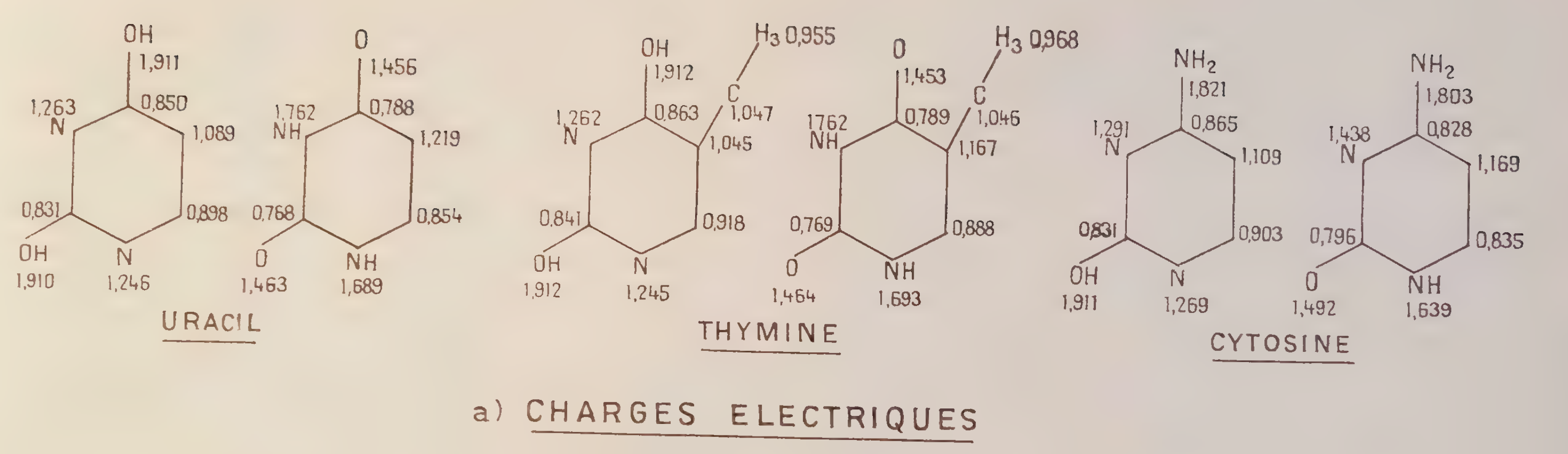
(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) B. G. Ranby et Riby, *Experientia*, 6, 1950, p. 12.
(2) R. F. Nickerson et J. A. Habrle, *Ind. Eng. Chem.*, 39, 1947, p. 1507
(3) O. A. Battista et S. Coppick, *Text. Res. J.*, 17, 1947, p. 419.
(4) G. F. Davidson, *J. Text. Inst.*, 34, 87, 1943.
(5) F. F. Morehead, *Text. Res. J.*, 20, 1950, p. 549.

CHIMIE THÉORIQUE. — *Structure électronique des pyrimidines entrant dans la constitution des acides nucléiques et des antimétabolites apparentés intervenant en chimiothérapie anticancéreuse* (1). Note (*) de Mme **Alberte Pullman** et M. **Bernard Pullman**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous avons présenté dans une Note antérieure (2) les résultats des calculs sur la distribution électronique dans les bases puriques fondamentales entrant dans la constitution des acides nucléiques ainsi que dans un certain nombre de composés apparentés. Ces données, enrichies de calculs complémentaires, ont servi à l'établissement de corrélations entre la structure électronique et l'activité en chimiothérapie anticancéreuse des antimétabolites des bases puriques (3) ainsi qu'à l'étude des différentes propriétés physicochimiques de ces corps (4).

La présente Note contient les résultats de calculs analogues effectués


URACIL
THYMINE
CYTOSINE
a) CHARGES ELECTRIQUES

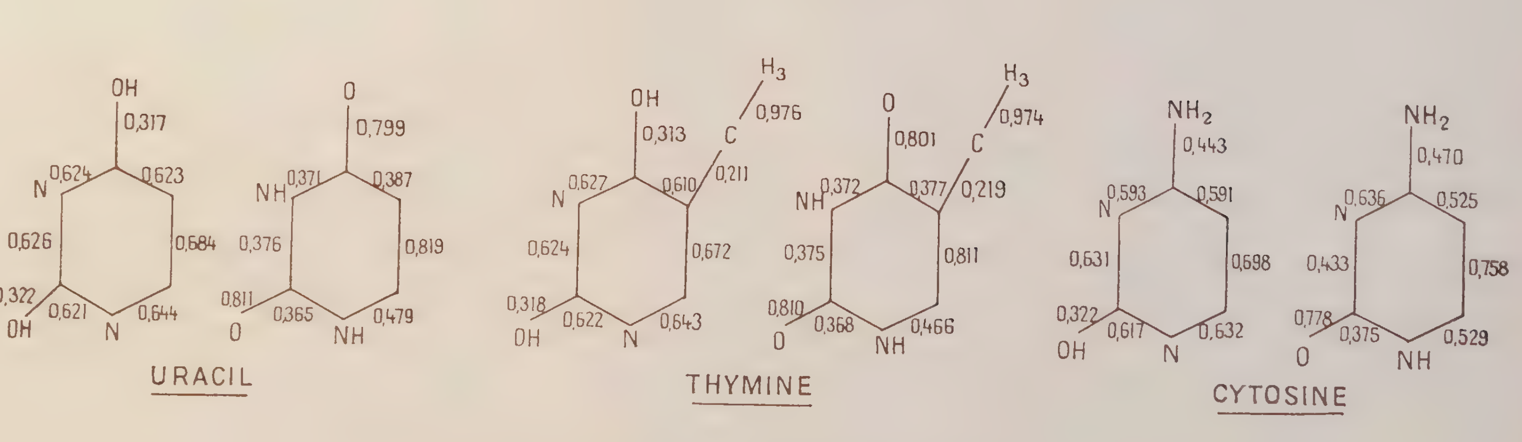

URACIL
THYMINE
CYTOSINE
b) INDICES DE LIAISON MOBILE

Fig. 1.

a) CHARGES ÉLECTRIQUES

2-THIOURACIL

6-AZATHYMINE

b) INDICES DE LIAISON MOBILE

2-THIOURACIL

6-AZATHAMINE

Fig. 2.

sur la distribution électronique dans les bases pyrimidiniques fondamentales, entrant dans la constitution des acides nucléiques : *l'uracil, la thymine* et *la cytosine*. Des calculs ont également été effectués pour un certain nombre d'antimétabolites potentiels et la Note présente les résultats obtenus pour deux tels composés particulièrement représentatifs [5] : le 2-thiouracil et la 6-azathymine.

Les substances considérées ici peuvent, en principe, manifester une isomérie amino-imine et céto-énolique. L'évidence expérimentale paraît indiquer l'exclusivité de la forme amine et une forte prépondérance de la forme cétonique [6]. Les figures présentent les résultats des calculs pour la forme cétonique et la forme énolique.

Les détails des calculs et la discussion des résultats seront donnés au *Bulletin de la Société chimique de France*.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) Ce travail a bénéficié d'une subvention du Public Health Service des États-Unis.

(2) A. Pullman, B. Pullman et G. Berthier, *Comptes rendus*, 243, 1956, p. 380.

(3) B. Pullman et A. Pullman, *Colloque international sur la chimiothérapie des cancers et des leucémies*, Paris, 1957 (Éditions du C. N. R. S., sous presse); *Bull. Soc. Chim.* (sous presse).

(4) A. Pullman, *Bull. Soc. Chim.* (sous presse).

(5) J. H. Burchenal, *Current Res. in Cancer Chemiotherapy*, Report n° 4, 1956, p. 3.

(6) *Voir*, par exemple : D. O. Jordan dans E. Chargaff et J. N. Davidson, *The nucleic acids*, Acad. Press., New-York, 1, 1955, p. 447.

CHIMIE MINÉRALE. — *Structure et stabilité du trisulfure de titane.* Note (*) de MM. **Yves Jeannin** et **Jacques Bénard**, présentée par M. Georges Chaudron.

L'existence du sulfure de titane TiS_3 a été signalée pour la première fois par Biltz, Ehrlich et Meisel [1] à la suite de mesures de tension de dissociation des phases dans le système titane-soufre. En 1954 Hägg et Schönberg [2] ont étudié ce système par rayons X sans retrouver ce composé; par contre, Hahn et Harder [3] l'ont isolé récemment et viennent d'en publier les paramètres cristallins. L'objet du présent travail, entrepris avant que nous ayons eu connaissance de cette publication, était de déterminer la structure et le domaine de stabilité de la phase TiS_3. Nous en résumerons ci-dessous les principaux résultats.

Si l'on chauffe entre 500 et 700°, dans un tube de silice scellé vide d'air, un mélange de soufre et d'éponge de titane à 0,14 % d'impuretés (Du Pont de Nemours, U. S. A.), correspondant à la composition TiS_3, on observe après 24 h de traitement le développement de beaux cristaux à éclat

métallique dont la forme dépend de la température : vers 650° ce sont des touffes de cristaux rubanés noirs, vers 550° des plaques hexagonales dorées. Un séjour prolongé, 15 jours par exemple, du tube scellé à la température de réaction peut donner naissance à des cristaux dont la plus grande dimension dépasse 10 mm. Le passage d'une forme à l'autre s'opère autant de fois qu'on le désire en faisant varier la température.

L'analyse de ces deux formes, faite par oxydation à l'air et pesée de l'oxyde TiO_2 formé, conduit pour les cristaux rubanés à la formule TiS_3 et pour les plaquettes hexagonales à la formule TiS_2.

L'étude cristallographique du disulfure permet de retrouver la maille hexagonale décrite antérieurement par Goldschmidt ([1]). Pour un échantillon de formule $TiS_{1,97}$ nous trouvons par la méthode Debye et Scherrer en retour, avec le chlorure de sodium comme étalon :

$$a = 3,400 \pm 0,001\ \text{Å},$$
$$c = 5,699 \pm 0,001\ \text{Å}.$$

L'étude cristallographique du trisulfure par les méthodes du cristal tournant et de Laue donne une maille monoclinique de constantes :

$$a = 4,97\ \text{Å} \pm 0,01\ \text{Å},$$
$$b = 3,42\ \text{Å} \pm 0,01\ \text{Å},$$
$$c = 8,78\ \text{Å} \pm 0,01\ \text{Å},$$
$$\beta = 97^\circ\ 10'.$$

Ces résultats sont confirmés par des clichés de Weissenberg sur les strates $(h\,0l)$, $(0\,k\,l)$, $(h\,1l)$, et sont en parfait accord avec ceux de Hahn et Harder ([3]), sauf en ce qui concerne l'axe c non binaire, qui est donné double par ces auteurs; les extinctions systématiques sont en effet limitées aux taches $0\,k\,0$ avec $k = 2n + 1$. La densité du trisulfure, mesurée par la méthode de la poussée d'Archimède dans le 1.2-dibrométhane, est égale à $3,20 \pm 0,01$. Le nombre de molécules par maille ainsi obtenu est égal à 2.

La comparaison des mailles de ces deux sulfures montre qu'elles possèdent un paramètre commun : 3,40 A. Ceci explique pourquoi, lors du passage du disulfure au trisulfure, les rubans de trisulfure se développent souvent parallèlement aux côtés des hexagones de disulfure de manière à assurer la continuité de structure d'une phase à l'autre comme le montre le cliché de la figure 1 (G. = 60).

Nous nous sommes proposés ensuite de déterminer l'influence de la pression de vapeur de soufre sur la température de l'équilibre :

$$x\,TiS_2 + S_x \rightleftharpoons x\,TiS_3$$

écrit ici sans préjuger de l'atomicité de la vapeur de soufre. L'étude a été

faite en déterminant les températures d'apparition et de disparition de la phase rubanée noire TiS_3 sur une série de tubes scellés contenant une même quantité de sulfure TiS_2 (100 mg) associée à des quantités variables de soufre. Le disulfure d'origine répondant à la formule $TiS_{1,97}$ était

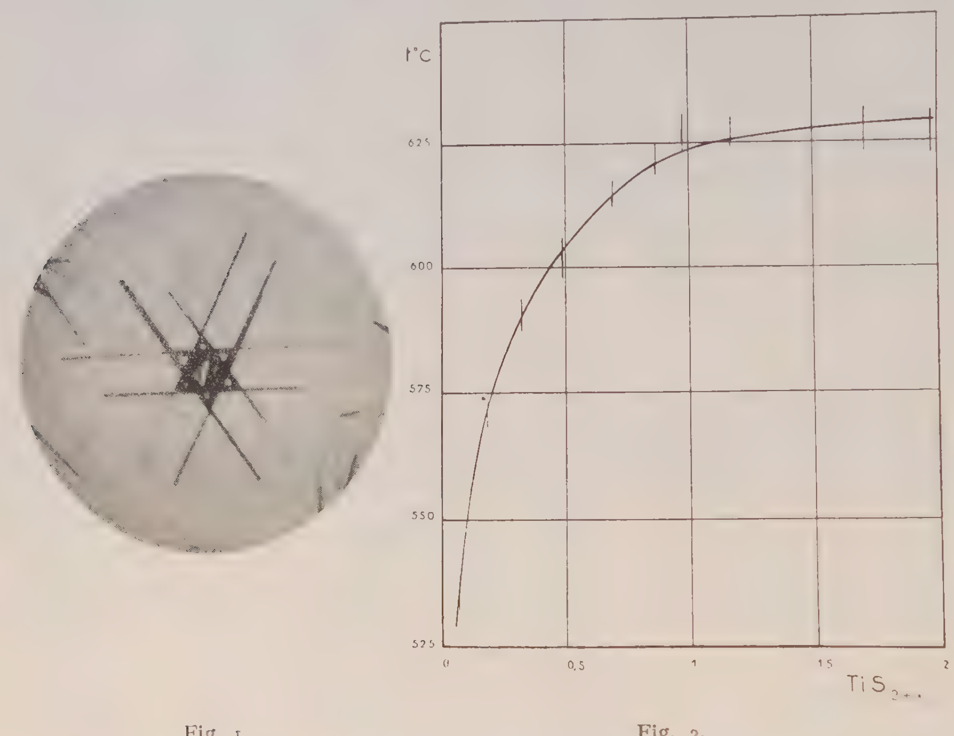


Fig. 1.

Fig. 2.

préparé par chauffage en tube scellé à 1000° C d'un mélange titane-soufre en proportion convenable. En pratique, lorsqu'on refroidit progressivement une ampoule donnée, la température d'apparition du trisulfure indique l'établissement de l'équilibre ci-dessus : la pression régnant alors dans l'enceinte est donc la tension de dissociation de TiS_3 à cette température. Cette température devrait être retrouvée si, partant du trisulfure, on cherche à le faire disparaître complètement en réchauffant lentement l'échantillon; en fait, il existe entre ces valeurs expérimentales un léger décalage (*fig.* 2). La température d'équilibre, située entre ces deux limites, s'élève de 535° pour une composition globale $TiS_{2,10}$, à 628° pour une composition globale TiS_4, par suite de l'accroissement de la pression de vapeur du soufre dans l'enceinte. Ces pressions restent difficiles à déterminer : il faudrait en effet tenir compte de l'équation d'état de la vapeur de soufre, proche de son point d'ébullition dans ce domaine de température, et de l'atomicité de la vapeur, fonction de la pression et de la température.

Le fait que Hägg et Schönberg n'aient pas observé le trisulfure n'a rien de surprenant si l'on remarque que ces auteurs opéraient à une température située, d'après nos expériences, au-delà du domaine de stabilité de cette phase.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) W. Biltz, P. Ehrlich et K. Meisel, *Z. Anorg. Chem.*, 234, 1937, p. 97.

(2) G. Hägg et N. Schönberg, *Arkiv för Kemi*, 7, 1954, n° 40, p. 371.

(3) H. Hahn et B. Harder, *Z. anorg. allg. Chem.*, 288, n°s 5-6, 1957, p. 241.

(4) V. M. Goldschmidt, *Geochemische Verteilungsgesetze*, VIII, Oslo, 1927.

(*Laboratoire de Chimie minérale B. E. N. S. C. P.*)

CHIMIE ORGANIQUE. — *Synthèses de nitrosochlorures sans l'intervention du chlorure de nitrosyle.* Note de MM. **Roger Perrot**, **Pierre Wodey** et Mlle **Ginette Baudry**, présentée par M. Marcel Delépine.

Les dérivés alcoxylés obtenus par action des alcools sur le nitrosochlorure du diphényl-1.1 éthylène sont reconvertis en nitrosochlorure au moyen du gaz chlorhydrique en milieu éthéré.

Dans une Note précédente (1) nous avons montré que le nitrosochlorure du diphényl-1.1 éthylène (I) réagit très facilement avec les alcools pour donner les $\alpha.\alpha$-diphényl α-alcoxyacétaldoximes, selon le schéma A.

Ces dernières, lorsqu'elles sont soumises à l'action de ClH gaz en solution éthérée refroidie dans la glace, sont reconverties en nitrosochlorures (2) (schéma B).

$$\underset{\text{(I)}}{(C_6H_5)_2C(Cl)—CH : NOH} + ROH \underset{B}{\overset{A}{\rightleftharpoons}} \underset{\text{(II) si } R = CH_3}{(C_6H_5)_2C(OR)—CH : NOH} + ClH$$

Le nitrosochlorure obtenu est caractérisé par sa décomposition à la fusion, par sa transformation en nitrolamine de point de fusion caractéristiques ou encore par sa transformation en $\alpha.\alpha$-diphényl α-alcoxyacétaldoxime sous l'action d'un alcool.

Ces faits montrent le caractère essentiellement réversible de la réaction d'un alcool avec un nitrosochlorure du type considéré et laisse entrevoir la possibilité d'une synthèse d'un nitrosochlorure sans l'intervention, directe ou indirecte, du chlorure de nitrosyle.

Pour que la réaction (B) ait lieu il faut que la concentration de ROH soit faible, c'est pourquoi on dissout la diphénylalcoxyacétaldoxime dans

l'éther. Ainsi lorsqu'on agite le nitrosochlorure avec du méthanol froid saturé de ClH, il est quand même transformé en diphénylméthoxyacétaldoxime (II) selon le schéma A.

Nous avons synthétisé (II) à partir de l'α.α-diphényl α-hydroxyacétaldoxime (III), obtenue selon Tiffeneau [3] par action de C_6H_5MgBr sur l'isonitrosoacétophénone, par méthylation directe au moyen de CH_3OH saturé de ClH (réaction C). Par dilution avec de l'eau on sépare un solide qui, purifié dans la ligroïne, fond à 115° et est identique à (II).

On peut former plus simplement encore le nitrosochlorure (I). Il suffit de faire passer ClH gaz dans une solution éthérée froide de (III) :

$$\text{(D)}\quad \underset{\text{(III)}}{(C_6H_5)_2C(OH){-}CH:NOH} + ClH \rightarrow (C_6H_5)_2CCl{-}CH:NOH + H_2O$$

Les transformations A, B, C et D ont été suivies en identifiant les produits de réaction. On peut se rendre compte rapidement si l'une d'elles s'est produite en déterminant, même sur le produit brut, la teneur en chlore ou en groupement alcoxyle.

Par exemple, en partant du nitrosochlorure (I) préparé par la réaction (D), ou plus simplement par action de NO Cl sur le diphényléthylène, on peut faire une réaction (A), puis, sur le produit obtenu, une réaction (B) et, au moyen d'un autre alcool, refaire une réaction (A). On réalise ainsi une opération de remplacement d'un groupement alcoxyle par un autre.

Exemples 1. — On fait passer un courant de ClH dans 20 ml d'éther froid renfermant 1 g de diphénylméthoxyacétaldoxime (II). Le précipité blanc obtenu fond en se décomposant vers 90°. Par évaporation de l'éther on obtient encore du nitrosochlorure (en tout 0,95 g). Par action de CH_3OH on revient au produit initial.

2. Opération semblable avec 0,7 g de diphénylisobutoxyacétaldoxime. On a obtenu 0,55 g de nitrosochlorure pur, F 95-97° déc., donnant avec la pipéridine la nitrolamine fondant à 131-132° [2].

3. Opération semblable avec 1 g de diphénylbenzyloxyacétaldoxime, F 122°. On isole 0,7 g de nitrosochlorure brut, coloré en brun, qui est converti par le méthanol en (II) fusible à 115°.

4. Du nitrosochlorure (I) est agité avec du méthanol froid saturé de ClH. La solution colorée en violet est versée dans l'eau; c'est le dérivé méthoxylé (II) qui est précipité.

5. α.α-diphényl α-hydroxyacétaldoxime (III), F 122-124°. Masse moléculaire 450 dans le benzène, 250 dans le dioxane (calculée 227).

a. Action de ClH dans l'éther à 0°, Le produit grisâtre obtenu par évaporation de l'éther se décompose vers 90°, il est converti en nitrolamine fondant à 131° par la pipéridine; le méthanol le transforme en (II) fondant à 115°.

b. Méthylation, 25 ml de méthanol renfermant 1 g de (III) sont traités par Cl H gaz à 0° (il apparaît une coloration violette), chauffés à 35° et versés dans de l'eau. On obtient 0,85 g de (II) fondant vers 110°, et à 115° après cristallisation dans la ligroïne.

6. L'α-phényl α-paratolyl α-méthoxyacétaldoxime (F 84°) traitée par ClH dans l'éther conduit au nitrosochlorure que la pipéridine transforme en nitrolamine, F 122°, identique à celle obtenue à partir du nitrosochlorure pur, F 83-85° déc.

7. Opération semblable avec l'α.α-diparatolyl α-méthoxyacétaldoxime, F 120° (11,52 % O CH_3). Le produit obtenu ne renferme plus que 0,6 % O CH_3, il se décompose vers 90°; c'est du nitrosochlorure presque pur; traité avec du méthanol il redonne le produit de départ.

(1) *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 283.
(2) R. Perrot, *Thèse*, Paris, 1939.
(3) A. Orekhoff et M. Tiffeneau, *Bull. Soc. Chim.*, 41, 1937, p. 841.

(*Faculté des Sciences de Besançon, Laboratoire de Chimie générale.*)

CHIMIE ORGANIQUE. — *Hémiacétalisation transannulaire chez les hydroxycétones dérivées du dibenzo [a, d] cycloheptadiène.* Note (*) de MM. **Jean Rigaudy** et **Lucien Nedelec**, présentée par M. Charles Dufraisse.

On montre que l'hydroxy-1 dibenzo-2.3, -6,7 cycloheptadiène dione-4.5 possède en réalité une structure hémiacétalique transannulaire. Cette hémiacétalisation paraît dépendre de l'activation du carbonyle intéressé car la monocétone hydroxylée correspondante est sous la forme non cyclisée.

Poursuivant nos recherches sur les cétones dérivées du dibenzo [*a*, *d*] cycloheptadiène (1), (2) et sur leur transformation éventuelle en composés à structure tropolonique (3), nous avons cherché à préparer l'hydroxy-1 dibenzo-2.3, -6.7 cycloheptadiène dione-4-5, I*a*. Cette dernière est, en effet, la forme tautomère d'une dibenzo γ-hydroxytropolone, V, qui, d'après nos résultats antérieurs (1), devait, très probablement, être instable à l'état libre mais qu'on pouvait espérer obtenir à l'état de dérivés.

Pour cela nous sommes partis de la dione monobromée, I*b*, $C_{15}H_9O_2Br$, aiguilles jaune citron, F_{inst} 215°, facilement accessible par action du brome sur la dione I*c*. L'hydrolyse de I*b* par Ag_2O en milieu hydroacétonique aboutissait à un composé hydroxylé, $C_{15}H_{10}O_3$, F_{inst} 168-169°, qui se présentait en bâtonnets incolores. Cette absence de coloration était singulière pour un composé α dicétonique, d'autant plus que la dione I*c* est normalement colorée en jaune; toutefois, le produit obtenu donnait bien, avec l'*o*-phénylène diamine à chaud, une quinoxaline, $C_{21}H_{14}ON_2$, F_{inst} 249°. De plus, dans la soude

aqueuse, où il se dissolvait à froid sans altération, il subissait par léger chauffage une dégradation en anthranol comme on pouvait s'y attendre avec un corps de structure I*a* se transformant par réarrangement benzilique en un acide dihydroanthracénique III*a*, instable et susceptible de se stabiliser par perte simultanée d'eau et de gaz carbonique. L'acidification ultérieure de la solution alcaline conduisait à l'anthrone.

I: a, R = OH; b, R = Br; c, R = H; d, R = $OCOCH_3$; e, R = OCH_3

II: a, R = H; b, R = $COCH_3$; c, R = CH_3

III: a, R = H; b, R = CH_3

IV: a, R = CO_2H; b, R = CO_2CH_3; c, R = CH_2OH; d, R = CHO

V

VI

VII: a, R = OH; b, R = H

VIII

L'estérification du composé hydroxylé par le mélange anhydride acétique-acétate de sodium aboutissait à un monoacétate, $C_{17}H_{12}O_4$, aiguilles incolores, F_{inst} 139-140°, tandis que, par chauffage dans le méthanol chlorhydrique, on obtenait un monoéther méthylique, $C_{16}H_{12}O_3$, cristaux incolores, F_{inst} 106-107°. Ces deux monodérivés ne donnaient plus d'hydrogène mobile par la méthode de Zerewitinoff, ce qui excluait pour le composé hydroxylé la structure V, considérée déjà comme très improbable. La structure I*a* n'en était pas pour autant établie car l'absence de coloration qui avait paru étonnante pour le composé hydroxylé se retrouvait chez ses monodérivés et, en outre, ces derniers ne réagissaient plus avec l'*o*-phénylènediamine. Par ailleurs, le monoéther méthylique se révélait insensible à l'action des alcalis, même à chaud, ce qui paraissait tout à fait anormal pour une structure α dicétonique telle que I*e*. Nous nous sommes par suite demandé si le composé hydroxylé de départ ne possédait pas, au lieu de la structure I*a*, la structure hémiacétalique tautomère II*a*, résultant d'une addition transannulaire de l'hydroxyle sur l'un des carbonyles. Du fait de la tautomérie, le composé hydroxylé devait dans ce cas présenter des propriétés dicétoniques alors que ses monodérivés, de formules respectives II*b* et II*c*, devaient en être dépourvus.

Nous avons pu montrer qu'il en était bien ainsi en préparant, directement à partir de la dione bromée I*b*, les monodérivés de structure dicétonique, I*d* et I*e*, isomères des précédents. L'action de l'acétate d'argent sur I*b* conduit au monoacétate I*d*, $C_{17}H_{12}O_4$, cristaux jaunes, F_{inst} 157-158°, manifestement différent de l'acétate II*b*, préparé à partir de II*a*. De même, la dissolution de I*b* dans la potasse méthylique à froid donne l'éther I*e*, $C_{16}H_{12}O_3$, cristaux massifs jaunes, F_{inst} 192-193°, différent de II*c*.

Ces nouveaux dérivés réagissent normalement avec l'*o*-phénylènediamine pour donner les quinoxalines correspondantes : quinoxaline de I*d*, $C_{23}H_{16}O_2N_2$, F_{inst} 238° ; quinoxaline de I*e*, $C_{22}H_{16}ON_2$, F_{inst} 188° puis 196-197°. Par chauffage avec les alcalis aqueux suivi d'acidification, ils subissent la même dégradation en anthrone que le composé hydroxylé. En outre avec l'éther I*e*, il nous a été possible de vérifier l'exactitude du processus de dégradation précédemment admis : en prenant la précaution d'acidifier la solution alcaline à un pH voisin de 4, nous avons pu isoler l'étape intermédiaire, l'acide dihydroanthracénique III*b*, $C_{16}H_{14}O_4$, cristaux incolores F_{inst} 190° (décomp.). Cet acide et son ester méthylique, $C_{17}H_{16}O_4$, bâtonnets incolores, F_{inst} 110° puis 121°, obtenu par le diazométhane, présentent des spectres ultraviolets caratéristiques de la structure dihydroanthracénique ([4]).

L'acide III*b* est très sensible à l'action des acides forts qui le décomposent rapidement en anthrone. Nous avons pu néanmoins, par ébullition dans KOH isobutylique, le déshydrater en acide anthracénique IV*a*, $C_{16}H_{12}O_3$, cristaux jaune pâle, F_{inst} 219-221°. L'ester méthylique IV*b*, $C_{17}H_{14}O_3$, F_{inst} 117°, est réduit par $LiAlH_4$ en méthoxy-9 hydroxyméthyl-10 anthracène, IV*c*, $C_{16}H_{14}O_2$, cristaux jaune pâle, F_{inst} 149-151°, qu'on obtient également par une réduction analogue du méthoxy-9 formyl-10 anthracène, IV*d*, déjà connu ([5]).

L'état de tautomérie du composé hydroxylé, précédemment décrit, se trouve démontré par le fait qu'on peut le régénérer à partir des dérivés des deux séries : par saponification alcaline à froid des acétates I*d* et II*b* ou par coupure à l'aide de BrH concentré des éthers I*e* et II*c*. Cependant l'identité parfaite de son spectre ultraviolet et de ceux des dérivés II*b* et II*c* prouve qu'il possède la structure II*a* ([4]).

Si l'hémiacétalisation intramoléculaire est une réaction assez générale chez les cétones et aldéhydes hydroxylés acycliques, l'hémiacétalisation transannulaire semble, par contre, beaucoup plus rare. Toutefois, il a été montré que l'hydroxy-5 dibenzo-2.3,-6.7 cyclooctadiénone-1 possédait en réalité la structure cyclisée VI ([6]). Il était par suite indiqué de rechercher si une telle hémiacétalisation n'intervenait pas également pour la monocétone correspondante de notre série, l'hydroxycétone VII*a*.

La réduction par la poudre de Zn dans NH_4OH [*voir* ([7])] de la dione-1.4, VIII, obtenue précédemment ([2]), conduit à un composé, $C_{15}H_{12}O_2$, cristaux incolores, F_{inst} 152-153°, qui est très probablement l'hydroxy-1 dibenzo-2.3,-6.7

cycloheptadiénone-4, de structure non hémiacétalique VII*a*. En effet son spectre infrarouge traduit la présence des fonctions OH et C = O et son spectre ultraviolet, tout à fait identique à celui de la cétone simple VII*b*, indique que le C = O doit se trouver en position 4 ([4]).

L'hémiacétalisation transannulaire dans la série du dibenzo [*a*, *d*] cycloheptadiène paraît donc nécessiter une activation du carbonyle intéressé ; dans le cas de II*a* cette activation est apportée par un second carbonyle. Nous avions déjà constaté chez la dione I*c* la grande tendance du carbonyle ainsi activé à additionner les alcools pour donner les hémiacétals correspondants.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

([1]) J. Rigaudy et L. Nedelec, *Comptes rendus*, 236, 1953, p. 1287.

([2]) J. Rigaudy et L. Nedelec, *Comptes rendus*, 237, 1953, p. 1096.

([3]) L. Nedelec, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1934.

([4]) Les spectres d'absorption seront reproduits dans une publication ultérieure.

([5]) F. Krollpfeiffer, *Ann.*, 462, 1928, p. 63.

([6]) A. C. Cope et S. W. Fenton, *J. Amer. Chem. Soc.*, 73, 1951, p. 1668.

([7]) J. W. Cook, *J. Chem. Soc. London*, 1928, p. 61.

(*Laboratoire de Chimie organique de l'École Supérieure de Physique et de Chimie industrielles, Paris*).

GÉOPHYSIQUE. — *Sur quelques anomalies gravimétriques en Bretagne*. Note de MM. **Robert Bollo**, **Jean Goguel** et **Jean-Louis Jæger**, présentée par M. Pierre Pruvost.

Des levers sont actuellement en cours en Bretagne pour l'établissement par le Bureau de recherches géologiques, géophysiques et minières de la Carte Gravimétrique de la France au 1/80 000e. Dans l'ensemble, les feuilles provisoires montrent une bonne concordance entre les variations de la gravité et les caractères géologiques connus : parallélisme entre les isanomales et les structures, coïncidence entre des anomalies légères et les affleurements de massifs granulitiques ([1]), etc.

Mais, dans quatre cas actuellement relevés, on a rencontré un type d'anomalies tout à fait différent qui tranche avec l'allure générale de la carte gravimétrique. Il s'agit d'anomalies légères occupant des surfaces relativement petites, de formes allongées selon des directions allant de Nord-Sud à Nord-Nord-Ouest-Sud-Sud-Est, c'est-à-dire traversant les directions géologiques régionales, et caractérisées d'autre part par la diminution très rapide des valeurs de g : 6 à 8 mgal sur 1 km.

Deux d'entre elles se situent à faible distance sur le prolongement l'une de l'autre à Nort et à Saffré (feuille de Saint-Nazaire), la troisième est à Sainte-Anne-sur-Vilaine (feuille de Redon) et la quatrième au Sud-Ouest

de Rennes (feuille de Rennes), également à proximité du cours de la Vilaine. Cette dernière présente une longueur nettement supérieure à celles des précédentes, près de 15 km contre environ 5 km à Nort et à Sainte-Anne, et moins de 4 km à Saffré. Mais dans tous les cas les largeurs sont voisines, de l'ordre de 2 à 3 km. Les défauts de gravité par rapport aux valeurs moyennes limitrophes vont de 6,5 mgal (Saffré) à 8,5 mgal (Rennes), avec 7,5 mgal à Sainte-Anne et à 8 mgal à Nort.

Le caractère le plus remarquable de ces anomalies est la coïncidence qu'elles présentent avec des formations tertiaires indiquées par la carte géologique, affleurant sur des surfaces limitées et qui pour Nort, Saffré et Sainte-Anne n'étaient connues que sur de faibles épaisseurs : moins de 40 m à Nort et à Saffré pour des couches essentiellement calcaires (lacustres ou marines) allant du Lutétien supérieur à l'Aquitanien; encore moins à Sainte-Anne. A Rennes, la partie Sud du bassin tertiaire a été recoupée en profondeur par la mine de Pontpéan. On y a reconnu que ce bassin est limité à l'Ouest par une faille subverticale qui le met en contact avec les schistes de Rennes (Briovérien) jusqu'à près de 250 m de profondeur, presque sous le cours de la Seiche, le fond du bassin remontant de ce point vers le Sud, au moins de 150 m. Le maximum de l'anomalie gravimétrique négative se trouve cependant à 2 km au Nord de la zone reconnue par la mine, où l'anomalie n'atteint que 2 mgal. L'âge exact de ces terrains constitués essentiellement d'argiles, de sables et de graviers n'est pas déterminé. Ils sont recouverts par les calcaires de Rennes (Oligocène).

Les caractères gravimétriques des anomalies ne paraissent explicables que par la présence, à très faible profondeur, d'une masse nettement plus légère que les roches limitrophes. Le défaut de masse correspondant à ces anomalies négatives est d'environ 1000 Mt à Nort et à Sainte-Anne, 500 Mt à Saffré, 2 500 Mt à Rennes. Les surfaces que paraît occuper dans chaque cas la formation légère sont de l'ordre de 10 km^2 à Nort et Sainte-Anne, 4 km^2 à Saffré, 25 km^2 à Rennes. En supposant pour cette formation un défaut de densité de 0,5 par rapport aux terrains encaissants, on voit qu'elle devrait avoir dans tous les cas des épaisseurs moyennes de 200 à 250 m. On notera cependant que la largeur à attribuer à l'anomalie de densité profonde ne peut, au stade actuel de l'interprétation, être appréciée que d'une manière assez grossière.

Les observations faites à Pontpéan conduisent à penser que l'anomalie gravimétrique doit être interprétée par l'existence très locale d'une épaisseur considérable de terrain tertiaire. Nous suggérons qu'il pourrait en être de même pour les autres anomalies, et qu'elles pourraient tenir à l'existence de bassins, peut-être de graben faillés, de faible largeur, mais comportant une grande épaisseur de terrains tertiaires légers, contrai-

rement à ce que l'étude des affleurements avait conduit à supposer.

Il est impossible de dire dans quelle mesure des affaissements postérieurs ont simplement conservé des lambeaux de formations antérieurement plus étendues, ou quel rôle a pu jouer une subsidence contemporaine du dépôt, mais cette seconde hypothèse paraît *a priori* vraisemblable.

(1) *Voir* : S. Coron, *Sciences de la Terre*, 2, 1954, n° 4.

(*Bureau de Recherches géologiques, géophysiques et minières.*)

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Mise en évidence d'une forme combinée de l'ombelliférone dans l'*Hieracium Pilosella *L., après stabilisation.* Note de Mme **Micheline Haag-Berrurier**, présentée par M. Raoul Combes.

La Piloselle stabilisée renferme, à côté d'une petite quantité d'ombelliférone libre, une combinaison hydrolysable par les acides et l'émulsine, localisée principalement dans les feuilles, et qui est vraisemblablement un hétéroside de l'ombelliférone.

Parmi plusieurs substances extraites de l'*Hieracium Pilosella* L., et possédant une action antibiotique vis-à-vis de certains *Brucella*, P. Duquénois et E. Greib (1) ont isolé et identifié l'ombelliférone.

Ces auteurs avaient utilisé, sans stabilisation préalable, la Piloselle entière fraîche ou séchée. Il nous a paru intéressant d'étudier cette hydroxy-7 coumarine dans la plante stabilisée.

Comme matériel, nous avons choisi les feuilles de Piloselle, car elles sont nombreuses sur un même pied, faciles à isoler et riches en ombelliférone.

Ultérieurement nous leur avons comparé les stolons, les souches et les racines (ces dernières sont grêles, peu nombreuses et leur point d'insertion sur la souche est assez difficile à déterminer).

Ces différents organes ont été stabilisés dans les vapeurs d'éthanol bouillant, 2 ou 3 h après la récolte.

Connaissant la vive fluorescence de l'ombelliférone en lumière ultraviolette, la technique de chromatographie de partage sur papier nous a semblé être une méthode de recherche à la fois simple et fine.

Nous avons été guidée par une première observation : en comparant dans des conditions aussi quantitatives que possible, les chromatogrammes de deux extraits aqueux totaux de poudre de feuilles de Piloselle provenant d'une même récolte, l'un préparé à partir des feuilles stabilisées, l'autre à partir des feuilles séchées à l'air, nous avons constaté que le premier extrait est pauvre en ombelliférone libre, dont la fluorescence violette n'apparaît qu'après pulvérisation d'une solution alcaline sur le chromatogramme.

S'il a subi l'hydrolyse acide, l'extrait stabilisé présente au contraire, tout comme l'extrait de feuilles séchées à l'air, le spot très fluorescent de l'hydroxy-7 coumarine. La feuille stabilisée renferme donc, à côté d'une petite quantité d'ombelliférone libre, de l'ombelliférone combinée.

Nous avons essayé de localiser la position de cette combinaison sur le chromatogramme.

1 g de poudre est épuisé par 100 ml d'eau pendant 30 mn à l'ébullition. La solution extractive est filtrée et déféquée par 5 ml d'une solution d'acétate neutre de plomb à 10 %, qui ne précipite pas la combinaison, puis filtrée à nouveau et le précipité lavé à l'eau. Le plomb en excès est précipité par l'hydrogène sulfuré qui est éliminé à l'ébullition après filtration. Le filtrat est concentré puis déposé en traits sur papier Whatman n° 1.

Le chromatogramme est développé pendant 24 h dans le solvant *n*-butanol-acide acétique-eau (40.10.50) à 18-20° C.

Après séchage on peut repérer, en lumière de Wood, plusieurs zones fluorescentes :

— A la partie supérieure la zone de l'ombelliférone de R_f 0,91 ([2]);

— Une bande bleu violet qui devient jaune en milieu alcalin de R_f 0,59-0,66 ([2]);

— Une bande violet sombre de R_f 0,51-0,57 devient bleu clair intense par pulvérisation d'une solution de CO_3Na_2 à 5 % (cette bande est cependant moins brillante que celle de l'ombelliférone);

— Enfin, une bande blanc rosé, devenant orangée sous l'influence des sels alcalins et de R_f 0,47-0,52.

Ces différentes zones fluorescentes sont découpées et les surfaces non fluorescentes du chromatogramme fractionnées en bandes de R_f déterminé.

Puis chaque bande est éluée séparément dans l'éthanol à 50° pendant 24 h.

On prélève deux volumes égaux de chaque éluat : l'un sert de témoin, l'autre est soumis à l'hydrolyse chlorhydrique et tous deux chromatographiés à nouveau.

L'examen du deuxième chromatogramme révèle que la tache violette de R_f 0,51-0,57 a totalement disparu après hydrolyse tandis qu'une tache de vive fluorescence bleue violette de R_f 0,91 est apparue.

On obtient des résultats comparables si l'on réalise l'hydrolyse avec de l'émulsion pure Fluka, placée dans ses conditions d'action optima, tandis que l'invertase pure de la même marque se montre inactive.

Nous avons donc tout lieu de penser que la feuille de Piloselle stabilisée renferme, à côté d'une petite quantité d'ombelliférone libre, un hétéroside de l'hydroxy-7 coumarine.

Les stolons, souches et racines renferment-ils aussi cet hétéroside ?

Le travail suivant nous a renseigné sur leur richesse comparative en hétéroside et en ombelliférone libre.

Nous avons fait deux extraits aqueux de 50 mg de poudre stabilisée de chacun de ces organes provenant tous d'une même récolte. L'un des extraits est hydrolysé par l'émulsine, l'autre constitue le témoin. Après défécation, un même volume de chaque filtrat est déposé en spots sur papier, et chromatographié.

Le chromatogramme développé permet les observations suivantes :

— Avant hydrolyse, seules les feuilles présentent les taches visibles de l'ombelliférone libre et de l'hétéroside;

— Après hydrolyse, les feuilles donnent une tache d'ombelliférone dont la surface est de trois à quatre fois supérieure à celle de la tache d'ombelliférone libre et dont la fluorescence est beaucoup plus intense; stolons, souches et racines libèrent de l'ombelliférone à l'hydrolyse. Ils renferment donc aussi l'hétéroside, mais en si faible quantité que l'œil ne peut percevoir la fluorescence de son spot.

La fluorescence et la surface de la tache d'ombelliférone libérée sont, pour les stolons, à peu près égales à celles de l'ombelliférone libre dans les feuilles; elles diminuent des stolons aux souches, puis aux racines.

Par le truchement de la chromatographie, nous avons pu faire quelques essais de solubilité de l'hétéroside dans l'eau, le méthanol, l'éthanol à 95°, le butanol, l'acétone et l'éther.

Il est à peu près aussi soluble à froid dans l'eau et le méthanol, beaucoup moins dans l'éthanol, et pratiquement insoluble dans le butanol, l'éther et l'acétone.

A la lumière de ces différentes observations, nous pouvons donc conclure provisoirement que l'*Hieracium Pilosella* L. renferme un hétéroside de l'ombelliférone peu soluble en général dans les solvants organiques, hydrolysable par les acides et l'émulsine, et localisé en majeure partie dans les feuilles de cette plante.

Les travaux d'extraction de cet hétéroside sont en cours, afin d'en pouvoir déterminer la structure et les propriétés.

(1) *Comptes rendus*, 237, 1953, p. 1354.

(2) P. Duquénois et E. Greib, *Ann. pharm. fr.*, 14, 1956, p. 687-689.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Étude du métabolisme de l'acide glutamique dans les feuilles et les racines de* Bryophyllum Daigremontianum *Berger à l'aide d'acide glutamique marqué par* ^{14}C *en* 1 *ou en* 3.4. Note de Mlle **Marie-Louise Champigny**, présentée par M. Raoul Combes.

L'absorption d'acide glutamique marqué par ^{14}C en 1 ou en 3.4 permet de suivre les relations existant entre cet amino-acide et les différents corps qui en dérivent après une dégradation plus ou moins prononcée. La lumière accélère ces transformations.

Au cours de travaux relatifs à la fixation de $^{14}CO_2$ par les feuilles de *Bryophyllum Daigremontianum* Berger, j'ai constaté que la genèse de l'acide glutamique était plus rapide à la lumière qu'à l'obscurité ([1]). Il a semblé intéressant de compléter ces résultats par l'étude des composés formés à partir d'acide glutamique radioactif fourni à des boutures de feuilles cultivées en aquiculture, qui ont l'avantage d'offrir une grande surface foliaire à la lumière et de permettre une absorption rapide des substances dissoutes. Lorsque les feuilles ont 10 cm de long, les boutures reçoivent de l'acide (*dl*)-glutamique radioactif, d'activité spécifique 1 C/mole, en solution à la concentration de 73,5 mg/l. Pour une série, l'acide glutamique est marqué en 1 ($COOH\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH(NH_2)\text{-}^{14}COOH$), pour l'autre, il l'est en 3.4 ($COOH\text{-}^{14}CH_2\text{-}^{14}CH_2\text{-}CH(NH_2)\text{-}COOH$). Chaque série comporte deux lots de 4 ou 5 boutures recevant chacune 10 μC d'acide glutamique. Un lot est exposé à la lumière (20 000 lx) pendant 6 h et un autre mis à l'obscurité pendant le même temps, à la température de 21° C.

Les feuilles et les racines sont fixées séparément par projection dans l'alcool méthylique bouillant. Après extraction, les substances solubles sont fractionnées en trois groupes (amino-acides, acides organiques + composés phosphorylés, glucides) à l'aide de résines échangeurs d'ions. Les aminoacides sont séparés par chromatographie sur papier, les acides organiques par chromatographie sur colonne de silice. La radioactivité est déterminée après élution.

Les principaux résultats sont donnés dans les tableaux I et II.

L'absorption maximum correspond à la teneur moyenne en acide glutamique des feuilles dans les conditions normales de développement.

Bien que les quantités absorbées au cours des expériences I et II soient différentes, il est possible de dégager les conclusions suivantes.

La radioactivité totale fixée est plus grande à la lumière qu'à l'obscurité. *Dans les racines*, une partie importante de l'acide glutamique est transformée. La radioactivité se retrouve, soit dans d'autres amino-acides libres ou engagés dans les protéines, soit dans les acides organiques.

Par suite, les feuilles reçoivent à la fois de l'acide glutamique, qui représente encore la majeure partie de l'apport radioactif, et quelques produits de ses transformations.

Dans les feuilles, à l'obscurité, des transformations analogues se poursuivent, mais à une vitesse vraisemblablement plus faible.

Dans les feuilles, à la lumière, la dégradation de l'acide α-cétoglutarique provenant de la désamination de l'acide glutamique est accélérée. Ce fait est traduit par la diminution de la radioactivité des acides organiques, particulièrement nette en présence de l'acide glutamique 1 ^{14}C. Le $^{14}CO_2$ libéré est repris par photosynthèse, d'où l'apparition de glucides radio-

actifs. La vitesse de l'apparition de ces derniers est lente, puisqu'elle nécessite la dégradation antérieure de l'acide glutamique par les mécanismes des oxydations qui sont eux-mêmes lents.

TABLEAU I.

Activités en nombre de coups $\times 10^{-3}$ *par minute et par gramme de feuilles sèches* (F) *et pour le poids sec correspondant de racines* (R) (50 à 80 mg). *Répartition de l'activité dans les différentes fractions des substances solubles.*

	Exp. I : Acide glutamique 3.4 ^{14}C.				Exp. II : Acide glutamique 1 ^{14}C.			
	F. lum.	R. lum.	F. obsc.	R. obsc.	F. lum.	R. lum.	F. obsc.	R. obsc.
Insoluble.........	8,5	5,0	3	5,2	Traces	0,5	Traces	0,4
Soluble..........	19,3	26,9	17,9	6,7	1,1	2,3	0,4	1,9
Ac. aminés (%)...	76,6	71,9	71	63	92	79,1	90	80,5
Ac. organ. + comp. phosp. (%).....	23,4	28,1	29	37	3,7	17	8	19
Glucides (%).....	Traces	Traces	Traces	0	4,3	3,9	2	0,5

TABLEAU II.

Pourcentages de la radioactivité des acides aminés et des acides organiques par rapport à l'activité de l'extrait soluble total.

	Expérience I : Acide glutamique 3.4 ^{14}C.		Expérience II : Acide glutamique 1 ^{14}C.	
	F. lum.	R. lum.	F. lum.	R. lum.
Acide aspartique.................	0,6 %	0 %	3,2 %	0 %
» glutamique.................	45	54	75,4	57,2
α-alanine........................	0,5	3	0	0
Glutamine.......................	23,2	1,5	7,4	12,6
Acide γ-aminobutyrique...........	5,2	13,4	0	0
Leucine.........................	1,5	Traces	0	0
Glycocolle......................	Traces	0	0	0
Thréonine.......................	0	Traces	0	0
Acide pyrrol.-carb...............	Traces	Traces	6	8,8
» pyruvique..................	11	} 28,1 (pyruvique à isocitrique)	1,2	0,9
» α-cétoglutarique...........	} 2,4 (*)		0,3	} 1,5
» succinique + fumarique......			0,6	
» glycolique + aconitique......	1,5		0,2	3,1
» malique....................	2		Traces	6,6
» citrique....................	3		} 0,3	0,4
» isocitrique.................	1,2			5

(*) La radioactivité de ces différents acides a été vérifiée par autoradiographie.

Le $^{14}CO_2$ libéré peut également être repris par β-carboxylation, mais cette reprise n'est importante que pour les organes placés à l'obscurité.

L'analyse détaillée des différents acides organiques (tableau II) montre

que la désamination de l'acide glutamique et la décarboxylation de l'acide α-cétoglutarique jouent un rôle essentiel dans la dispersion de la radioactivité.

L'activité des acides organiques est plus importante à la suite d'absorption d'acide glutamique 3-4 ^{14}C. Le marquage des acides α-cétoglutarique, succinique, fumarique, malique, citrique et isocitrique dans les feuilles, à la lumière et à l'obscurité, témoigne de l'entrée dans le cycle de Krebs de la molécule d'acide glutamique après désamination [*cf.* C. Lioret (²)]. De plus, l'acide malique des feuilles, à l'obscurité, présente une forte activité (20,7 % de l'activité totale) due à son accumulation caractéristique de la β-carboxylation.

L'analyse détaillée des amino-acides montre dans tous les cas une amidation de l'acide glutamique avec formation de glutamine.

L'absence de radioactivité de l'acide γ-aminobutyrique, après absorption d'acide 1 ^{14}C, s'oppose à son activité notable après absorption d'acide 3.4 ^{14}C, puisqu'il dérive de la décarboxylation de l'acide glutamique. En présence d'acide 3.4 ^{14}C, les marquages de l'acide aspartique, du glycocolle et de l'α-alanine, de même que celui de l'acide pyruvique, sont en relation avec les dégradations profondes de l'acide glutamique [*cf.* A. W. Naylor et N. E. Tolbert (³)].

En présence de l'acide 1 ^{14}C, la radioactivité de l'acide aspartique qui se retrouve même à l'obscurité résulte vraisemblablement d'une reprise du 1 ^{14}C par β-carboxylation.

L'acide pyrrolidone-carboxylique, ainsi que la proline radioactive présente dans les protéines des feuilles et des racines ayant absorbé l'acide 3.4 ^{14}C, proviennent de la cyclisation de l'acide glutamique.

Il faut signaler encore la présence d'arginine, de tyrosine, d'histidine et de valine radioactives dans les protéines.

L'absorption d'acide glutamique 1 ou 3.4 ^{14}C permet donc de distinguer les amino-acides qui en dérivent après décarboxylation et ceux dont la genèse ne nécessite pas ce début de dégradation.

A la faiblesse de la vitesse des oxydations cellulaires, responsables en majeure partie de la dispersion de la radioactivité de l'acide glutamique, s'oppose la multiplicité des corps qui en tirent leur origine. La lumière accélère cette dispersion aussi bien dans les acides organiques que dans les acides aminés et les protéines.

(¹) M.-L. Champigny, G. Jolchine et A. Moyse, *Conf. int. Radioisotopes Rech. Sc.*, U. N. E. S. C. O., Paris, 1957 (sous presse).

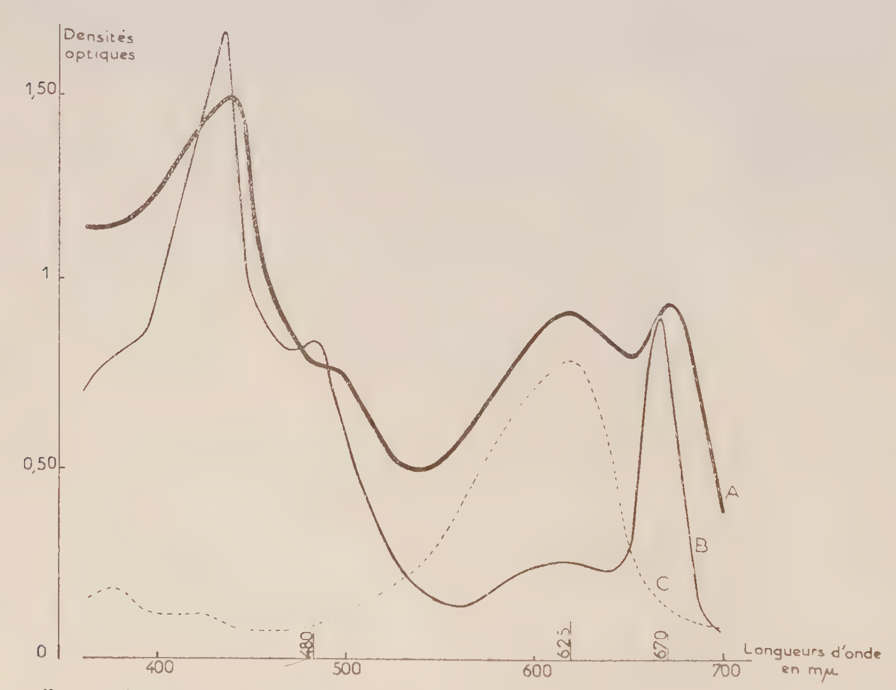
(²) *Comptes rendus*, **245**, 1957, p. 1329.

(³) *Physiologia Plantarum*, **9**, 1956, p. 220-229.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Influence de la température et de l'éclairement sur la teneur en pigments d'*Oscillatoria subbrevis *Schmidle* (Cyanophycées). Note de M. **Jacques Garnier**, présentée par M. Lucien Plantefol.

L'analyse des teneurs en pigments d'*Oscillatoria subbrevis* Schmidle, cultivée à des températures et à des éclairements différents, montre qu'aux faibles intensités lumineuses les teneurs en phycocyanines et chlorophylle *a* sont plus élevées à 20 qu'à 40°C. Il n'en est plus de même pour des éclairements plus intenses.

La même souche d'*Oscillatoria subbrevis* Schmidle, Cyanophycée d'eau thermale, est cultivée dans des conditions identiques par ailleurs, aux températures de 20 et 40° C. Les cultures sont faites en conditions aseptiques dans un milieu synthétique en présence d'air enrichi de CO_2 [1]. Elles sont illuminées pendant 12 h sur 24, les éclairements étant de 3 000, 3 300, 5 800 ou 12 000 lx selon les cas. Les volumes d'algues fraîches et les masses de substance sèche sont déterminés, ainsi que différents spectres d'absorption.



Spectres d'absorption d'une suspension (A) correspondant à 1 mg d'algues sèches par centimètre cube, d'un extrait acétonique d'une même quantité d'algues (B), et d'un extrait aqueux non quantitatif (C) d'*Oscillatoria subbrevis* Schmidle.

Une partie aliquote de chaque récolte est homogénéisée au mélangeur-broyeur et suspendue dans une solution de *dextran*, afin d'empêcher la sédimentation. Le spectre d'absorption en est établi. Des lames opalines

accolées aux cuves du spectrophotomètre diminuent les causes d'erreurs dues à la dispersion de la lumière par les particules en suspension ([2]). Des extractions par de l'acétone additionnée de 20 % d'eau, conduites de façon identique sur une autre partie de chaque lot, permettent d'obtenir, à défaut de l'extraction totale des pigments, des extraits comparables entre eux. Les courbes d'absorption d'une suspension d'algues, d'un extrait acétonique et d'une solution aqueuse des phycocyanines, représentées ici, sont comparables à celles obtenues avec d'autres Cyanophycées ([3]), ([4]), ([5]) et indiquent la présence de caroténoïdes, de phycocyanines et de chlorophylle *a*.

Les densités optiques, mesurées à 480, 625 et 670 mμ, sont corrigées de l'absorption indépendante des pigments à 540 mμ. L'absorption propre des caroténoïdes est estimée directement d'après la densité optique ainsi obtenue pour 480 mμ (D_{480}); celle des phycocyanines (D_p) et celle de la chlorophylle *a* (D_c) sont calculées à l'aide des équations de J. Myers et W. A. Kratz ([4]) :

$$D_p = 1{,}016\,D_{625} - 0{,}203\,D_{670} \qquad \text{et} \qquad D_c = 1{,}016\,D_{670} - 0{,}0813\,D_{625}$$

(D_{625} = densité optique à 625 mμ, D_{670} = densité optique à 670 mμ).

Les quantités de chlorophylle *a* et de caroténoïdes extraits par l'acétone aqueuse sont calculées par rapport au poids d'algues sèches après mesure de l'absorption à 460 et 663 mμ, selon G. Mackinney ([6]), J. Myers et W. A. Kratz ([4]).

Toutes ces valeurs sont réunies dans le tableau suivant:

Densités optiques des suspensions d'algues (1 mg *d'algues sèches par centimètre cube*).
Quantités de caroténoïdes et de chlorophylle a pour 100 *d'algues sèches* (% A. S.).
Rapports des teneurs en pigments à 40 *et* 20°C
(*calculés d'après les densités optiques des suspensions d'algues*) : $Q\frac{40^\circ}{20^\circ}$.
(Car., caroténoïdes; Phyc., phycocyanines; Chl. *a*, chlorophylle *a*.)

Éclairements.	Températures de culture (°C).	Densités optiques des suspensions d'algues. Car. (D_{480}).	Phyc. (D_p).	Chl. *a* (D_c).	Extraits acétoniques. Car. (% A.S.).	Chl. *a* (% A.S.).	$Q\frac{40^\circ}{20^\circ}$. Car.	Phyc.	Chl. *a*.
3 000 lx (*)	40	0,45	0,26	0,30	0,86	–	1,4	0,6	0,6
	20	0,32	0,41	0,46	0,66	–			
3 300 lx	40	0,33	0,14	0,23	0,50	0,68	1,2	0,4	0,6
	20	0,28	0,31	0,40	0,44	1,10			
5 800 lx	40	0,42	0,28	0,41	0,46	0,69	1,4	0,7	1
	20	0,29	0,39	0,42	0,41	0,93			
12 000 lx	40	0,47	0,43	0,33	0,67	0,93	1,5	1,6	1,3
	20	0,31	0,27	0,25	0,73	0,72			

(*) Les valeurs indiquées pour cet éclairement correspondent à la moyenne de deux séries de mesures.

Pour les faibles éclairements (3 000 et 3 300 lx), les algues cultivées à 40° C ont des teneurs en phycocyanines et en chlorophylle *a* plus faibles que celles des algues qui ont été cultivées à 20° C. Les rapports des densités optiques sont de 0,5 pour les phycocyanines et de 0,6 pour la chlorophylle *a*. Pour un éclairement plus élevé (5 800 lx), les différences s'amenuisent et, pour l'éclairement de 12 000 lx, on constate au contraire que les teneurs en phycocyanines et en chlorophylle *a* sont plus fortes à 40° C. Les quantités de chlorophylle *a* mesurées après extraction acétonique confirment ces résultats. Inversement, les teneurs en caroténoïdes des algues cultivées à haute température sont les plus élevées quel que soit l'éclairement (le rapport est dans tous les cas voisin de 1,4) et l'analyse des extraits acétoniques conduit aux mêmes résultats, avec cependant une atténuation des différences quand l'éclairement augmente.

La vitesse de la formation des pigments actifs dans la photosynthèse est gouvernée à la fois par la température et par l'intensité lumineuse.

La température qui, pour une masse d'algues déterminée, permet la formation la plus rapide de la chlorophylle *a* et des phycocyanines, est relativement basse en présence des faibles éclairements. Elle est beaucoup plus élevée en présence des éclairements eux-mêmes plus élevés. Ces résultats s'accordent avec l'optimum thermique de croissance observé entre 35 et 40° C pour les cultures ayant reçu 12 000 lx ([1]). Cependant il est à prévoir que cet optimum serait différent en présence d'éclairements plus faibles.

([1]) A. Moyse, D. Couderc et J. Garnier, *Rev. Cyt. Biol. vég.*, 18, 1957, p. 293-304.

([2]) K. Shibata, A. A. Benson et M. Calvin, *Univ. California, Berkeley, Radiation Lab.* (Unclassif. Health and Biology), n° 2.635, 1954, 31 pages dactyl.

([3]) R. Emerson et C. M. Lewis, *J. gen. Physiol.*, 25, 1942, p. 579-595.

([4]) J. Myers et W. A. Kratz, *J. gen. Physiol.*, 39, 1955, p. 11-22.

([5]) T. Svedberg et T. Katsurai, *J. Amer. Chem. Soc.*, 51, 1929, p. 3573-3583.

([6]) *J. biol. Chem.*, 140, 1941, p. 315-322.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Influence du facteur lumière dans l'action de l'acide disuccinoyl-peroxydique sur les racines de* Vicia Faba *L.* Note de Mlle **Yvonne Hiss**, présentée par M. Lucien Plantefol.

L'action supposée du facteur lumière, accentuant celle de la solution de l'acide disuccinoyl-peroxydique, a été controuvée. En revanche on peut établir une corrélation entre cette action et la localisation de la peroxydase dans les racines. Les résultats obtenus aux concentrations 1/3000 et 1/2000 sont analogues.

Dans un article récent, l'action de l'acide disuccinoyl-peroxydique (DSP), à différentes concentrations (de 1/1000 à 1/10 000), a été étudiée

par Garrigues ([1]), sur les racines de *Vicia Faba* L. Analysant la structure histologique de ces dernières, soumises à des concentrations égales ou inférieures à 1/4000, cet auteur distingue deux régions réagissant différemment :

— une partie centrale qui résiste et reste vivante;

— une région périphérique gravement endommagée et dont l'aspect extérieur se traduit par l'apparition de déchirures superficielles.

Ces assises superficielles très atteintes se situent dans une zone en contact avec la lumière. Garrigues s'est posé la question de savoir s'il existe une possibilité d'intervention de la lumière comme facteur actif capable de s'ajouter à l'action intrinsèque de la concentration. Nous avons donc entrepris une série d'expériences permettant de répondre à cette question et en même temps nous avons cherché à savoir si une concentration immédiatement supérieure, 1/3000, était également agissante à ce même point de vue.

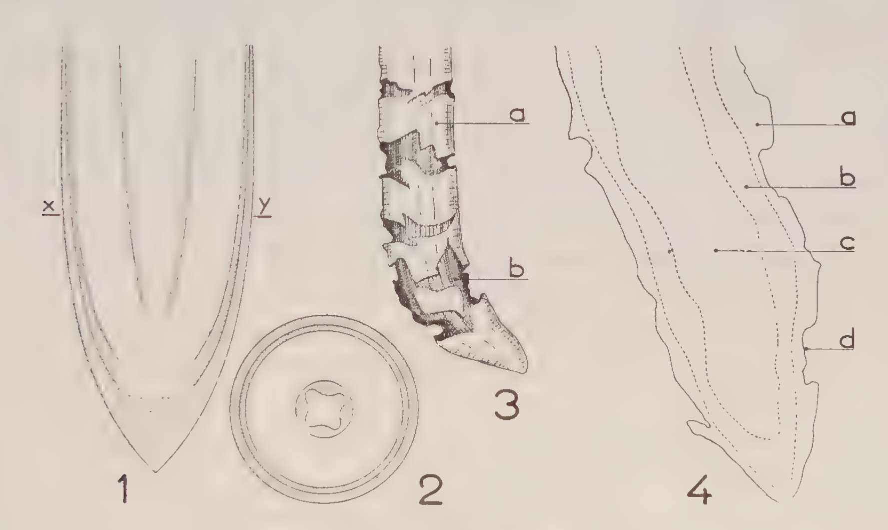


Fig. 1. — Diagramme d'une pointe de racine, d'après Jensen (modifié). Les surfaces en pointillé indiquent les zones de localisation de la peroxydase.

Fig. 2. — Diagramme d'une coupe transversale correspondant au niveau *xy* de la figure 1.

Fig. 3. — Aspect écailleux de la racine traitée, dû aux déchirures des assises superficielles (× 5).

Fig. 4. — Coupe longitudinale d'une racine traitée à la concentration 1/8000 (× 12).
a, zone corticale externe; *b*, zone corticale moyenne; *c*, partie centrale; *d*, déchirure.

Ceci nous a amenée à réaliser deux séries d'expériences séparées, quoique jumelées, pour des concentrations identiques, l'une dans la partie éclairée, l'autre dans la partie obscure d'une même étuve à culture, maintenue à 24° C. Nous avons ainsi séparé les deux actions : concentration, lumière. La durée de l'expérience a été limitée à trois jours.

Dans les deux essais faits, l'un en juin et l'autre en octobre 1957, sur le même matériel, le DSP ([3]) a été utilisé en solutions fraîches de concen-

trations 1/3000 et 1/8000, obtenues par dissolution du produit dans l'eau bidistillée. Pour la suite des préparatifs, nous avons opéré dans une pièce où régnait une obscurité quasi totale afin d'éliminer dès le départ le facteur lumière. Nous avons placé quatre lots de quinze plantules, aux racines de longueur sensiblement égale (en moyenne de 35 à 40 mm), dans des tubes de verre étranglés dans leur partie moyenne. Seules les racines baignaient dans la solution.

Les observations faites sont les suivantes :

1° *Concentration de* 1/3000. — A la lumière les racines brunissent par la pointe dès le début de l'expérience. Après 48 h elles présentent une altération profonde des tissus. Les racines ainsi attaquées se ramollissent et ne s'allongent pas. On n'observe pas de déchirures superficielles.

Le comportement des racines maintenues à l'obscurité est identique.

2° *Concentration de* 1/8000. — A la lumière les racines s'allongent et brunissent légèrement; au fur et à mesure de leur croissance, des sillons transversaux se forment et s'élargissent progressivement. Ces bandes alternées, claires et sombres, donnent aux racines un aspect écailleux; il s'agit des déchirures des assises superficielles.

A l'obscurité, on constate le même aspect écailleux avec apparition de déchirures (*fig.* 3 et 4).

Les résultats des expériences sont les suivants :

a. à la concentration 1/3000 les actions du DSP sont similaires à celles observées par Garrigues au 1/2000;

b. les attaques du DSP sont rigoureusement identiques à l'obscurité et à la lumière; ce dernier facteur n'intervient donc pas dans le phénomène constaté.

Il est probable que d'autres facteurs, d'ordre interne, soient à l'origine de la différence des réactions des assises superficielles et des assises profondes de la racine. L'étude faite par Jensen [2] de la localisation de la peroxydase (*fig.* 1 et 2) dans l'extrémité radiculaire de *Vicia Faba* L. met cet enzyme en évidence dans les régions suivantes : coiffe, assise limitante externe, zone corticale immédiatement sous-jacente et à un moindre degré dans la région des éléments conducteurs de l'organe.

On peut penser qu'il existe une corrélation entre l'activité de l'enzyme et les réactions obtenues par le DSP sur les assises les plus externes de la racine.

(1) R. Garrigues, *Rev. Cyt. et Biol. vég.*, 18, 1957, p. 105.
(2) W. A. Jensen, *Plant. Physiol.*, 30, 1955, p. 426.
(3) Synthétisé par M. Ekert à l'Institut du Radium.

(*Laboratoire de Botanique expérimentale de la Faculté des Sciences d'Alger.*)

ANATOMO-PHYSIOLOGIE. — *Mise en évidence de lymphatiques par injections intra-osseuses.* Note (*) de MM. **René-Ambroise Griffié** et **Jean Écoiffier**, présentée par M. Maurice Fontaine.

Des vaisseaux lymphatiques évacuant un produit injecté dans l'os montrent les relations fonctionnelles entre ces deux systèmes. Les barrières formées par les ganglions successifs permettent de concevoir les répartitions différentes de certains essaimages suivant que l'évacuation osseuse locale est à prépondérance veineuse ou lymphatique.

Le désir d'investigations fonctionnelles nous a fait chercher un moyen de recueillir le drainage d'un système osseux déterminé. Nous avons débuté en utilisant la technique déjà décrite par nous-même dans une étude sur le réseau veineux des os longs du Lapin ([1]). Nous employons un liquide colloïdal radio-opaque dont la dimension de la micelle est de l'ordre du micron.

En opérant avec des précautions particulières sur la mandibule du Chien, nous sommes arrivés à mettre en évidence l'élimination lymphatique d'un produit injecté dans le tissu propre de l'os. Sur l'animal vivant l'injection est poussée dans la région spongieuse sous une très forte pression. Nous utilisons à cet effet une seringue à double pas de vis. Le sacrifice *per experimentum* est une condition importante de réussite. Nous avons eu recours pour cela, par voie intra-saphène, soit au sulfate de strychnine, soit au cyanure de potassium, soit plus simplement au chloroforme.

Alors que l'aspect radiologique décèle une bonne pénétration typique des lymphatiques, le système veineux est à peine estompé. Le contrôle histologique confirme la véracité des faits.

Afin d'éviter la controverse d'une élimination sanguine plus rapide, nous avons, dans quelques expériences, pratiqué la striction d'une grande partie des veines cervicales. Le sang, ainsi contenu, recélait une partie du produit radio-opaque, mais en petite quantité.

Si l'injection est paramolaire, elle se généralise facilement au milieu de l'os, surtout dans la partie péri et interalvéolaire. L'évacuation se fait alors en prépondérance par deux conduits qui, après un trajet sous-cutané, s'enfoncent dans les épaisseurs sous-jacentes. Leurs origines sont sur la table externe au niveau des trous mentonniers. Ils passent en dessous de l'os tout en le côtoyant, puis ils se dirigent vers les vaisseaux de l'auge, la veine sub-linguale et la veine glossofaciale, avant d'aborder le ganglion sous-maxillaire (*fig.* 1).

Si le trocart a été placé dans la symphyse mandibulaire, la diffusion intra-osseuse est moins importante. Le drainage principal paramédian est cette fois satellite de la veine mentale. Dans certaines expériences

nous avons pu suivre sa trace jusque dans les espaces rétropharyngiens (*fig.* 2).

De ces résultats on peut conclure que les veines n'ont pas le privilège de drainer à elles seules certains os. Le rôle des vaisseaux lymphatiques est mis en évidence. L'abondance de ces conduits contribuant aux évacuations mandibulaires permettrait d'expliquer des observations cliniques différentes. En effet, les métastases néoplasiques de cette région sont plus localisées dans des essaimages ganglionnaires tandis que dans les drainages à prépondérance veineuse les métastases sont plus généralisées.



Fig. 2. Fig. 1.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) *Revue d'Orthopédie*, 43, n° 1, 1957, p. 29-37.

OPTIQUE PHYSIOLOGIQUE. — *Le seuil absolu visuel n'est-il qu'un seuil différentiel ?* Note de M. **Ernest Baumgardt**, présentée par M. Louis de Broglie.

On utilise fréquemment le terme « seuil absolu » en Physiologie sensorielle. A l'origine, on comprenait sous ce vocable *l'intensité stimulante* minimum susceptible de déclencher une sensation. Les progrès accomplis

pendant les dernières vingt années de recherches sur la vision ont conduit à modifier cette définition. Le seuil absolu de la vision est *l'énergie lumineuse minimum* qui, 50 fois sur 100, déclenche une sensation. On désigne comme seuil différentiel le supplément d'intensité ΔI qu'il faut ajouter ou soustraire à l'intensité stimulante I pour que, 50 fois sur 100, on perçoive une variation de la sensation.

Puisque l'énergie lumineuse est quantifiée, le seuil absolu est constitué par un certain nombre de quanta. Celui-ci devient minimum autant que l'énergie que représentent ces quanta, lorsque l'œil est adapté à l'obscurité, la lumière stimulante de longueur d'onde 500 mμ et la plage test vue périphériquement. En outre, le diamètre apparent et la durée du stimulus ne doivent dépasser certaines valeurs limites.

Au seuil absolu, entre 50 et 100 quanta frappent la cornée, mais seulement la moitié en atteignent la rétine et une fraction évaluée à moins de 20 % des derniers est absorbée dans les récepteurs et les excite.

Si la source lumineuse fonctionne à intensité constante, le nombre de quanta frappant la cornée à chaque essai varie pourtant autour d'une valeur moyenne, car l'émission, l'absorption et la transmission des quanta sont des processus aléatoires. Il était à prévoir que cette variation obéisse à la loi de Poisson et la preuve en a été faite récemment ([1]). Le nombre de quanta absorbés par les bâtonnets est donc essentiellement variable et sans faire d'hypothèses d'ordre physiologique ou psychologique, on conclut qu'un stimulus très faible mais d'intensité apparemment constante doit être tantôt vu, tantôt pas vu. L'expérience montre qu'il en est ainsi. Cela n'exclut nullement une variabilité du seuil absolu par suite d'événements biologiques d'ordre aléatoire. Au contraire, de tels événements existent et provoquent des phosphènes de durée variable qui peuvent masquer les stimuli test.

L'interprétation de l'ensemble des expériences sur le seuil absolu visuel conduit à considérer que le seuil absolu est conditionné par le nombre de quanta dont l'absorption par les bâtonnets déclenche les potentiels nerveux nécessaires pour que les centres supérieurs répondent par une sensation liminaire. Or, une définition possible du seuil différentiel dont le seuil absolu ne serait qu'un cas limite ($I = 0$), implique l'existence d'un « bruit de fond » nerveux correspondant à une intensité stimulante virtuelle I_0. Une certaine activité nerveuse permanente existe réellement dans l'organe visuel, même en absence de toute stimulation lumineuse. Sa présence a été démontrée dans la rétine du chat, et l'introspection montre qu'une sensation de noir complet n'existe pas en adaptation à l'obscurité (« Eigengrau » des auteurs allemands). Barlow ([2]) en tire la conclusion que le seuil absolu est le nombre de quanta dont l'absorption provoque une activité nerveuse supplémentaire suffisante pour que les centres supérieurs puissent

la différencier de l'activité permanente (bruit de fond). *Dans son hypothèse, le seuil absolu perd sa qualité essentielle et devient un seuil différentiel :*

$$\Delta I = C(I_0 + I)^{\frac{1}{2}},$$

où C est une constante, I_0 l'intensité virtuelle équivalent au bruit de fond et I l'intensité stimulante.

Dans cette hypothèse, quelle que soit la valeur de I, ΔI ne peut que croître avec I. Il suffirait de montrer par l'expérience qu'on peut choisir I de manière telle que $\Delta I(o) > \Delta I(I)$ pour invalider l'hypothèse de Barlow.

En effet, la projection d'un stimulus test infraliminaire se superposant au champ infraliminaire préexistant pourrait constituer une stimulation liminaire. Si l'un et l'autre n'apportent généralement pas assez de quanta pour que le seuil soit atteint, la somme de leur apport en quanta pourrait suffire. Cette vue ne cadre pas avec la théorie du bruit de fond, dans laquelle le champ préexistant I s'additionne au champ virtuel I_0, de sorte que ΔI augmenterait nécessairement. C'est pourquoi l'expérience permet de trancher la question, si l'hypothèse de Barlow est admissible ou non.

On ne peut pourtant pas adopter des valeurs quelconques pour la durée de présentation du test et pour le rapport entre son diamètre et celui de la plage constante, si l'on veut produire un effet observable. On doit utiliser un stimulus constant dont le diamètre apparent n'est pas trop grand par rapport à celui du test, car le seuil varie en fonction inverse des diamètres. Il faut aussi que le stimulus test ne soit pas de trop brève durée, car le seuil varie au moins avec l'inverse de la racine carrée du temps de stimulation. Si l'on omet d'observer ces précautions, le nombre de quanta apportés sur l'aire rétinienne stimulée par le champ constant devient une fraction si faible du nombre de quanta qu'amène le stimulus lui-même que la probabilité d'atteindre le seuil augmente trop peu pour se manifester.

Nous avons utilisé un test de 520 mμ de longueur d'onde, de 1° de diamètre apparent, de durée de 1 s, vu à 15° du centre fovéal. L'intensité du test demeure constante pendant l'expérience. Après chaque présentation, l'observateur répond ou non « vu » : ainsi on mesure la fréquence des « vu ». Nous avons opéré à un niveau inférieur au seuil. Ces mesures ont été alternées, à un rythme inconnu de l'observateur, avec des présentations simultanées d'un champ infraliminaire permanent de 2° de diamètre centré sur le test. Le tableau montre que la fréquence des « vu » augmente beaucoup et que le seuil est largement dépassé.

Dans une autre série de mesures, le champ de 2° a été remplacé par un champ de 4° de diamètre. Dans ces circonstances, l'apport en quanta étant moindre, l'effet de sommation devait être moindre aussi. Le tableau confirme cette prévision ; néanmoins, l'effet est encore notable et significatif :

	Situation.	Observations.	Vu.	(%).
Sujet 1.	Stimulus seul	386	161	41,7
	» plus champ 4°	386	184	47,6
	» seul	190	74	38,7
	» plus champ 2°	670	413	61,6
Sujet 2.	Stimulus seul	550	154	28,0
	» plus champ 4°	1 100	394	35,8
	» seul	150	44	29,4
	» plus champ 2°	350	177	50,6

Ainsi, les près de 4 000 observations faites avec deux sujets permettent d'affirmer qu'il existe un effet de sommation de quanta apportés par le stimulus permanent et le stimulus test. Cet effet augmente lorsque le diamètre apparent du stimulus permanent diminue. Ce résultat est en contradiction formelle avec l'hypothèse de Barlow qui explique le seuil absolu comme cas limite du seuil différentiel et prétend associer sa valeur au niveau de l'activité nerveuse en absence de toute stimulation lumineuse (bruit de fond).

(1) BAUMGARDT, *Comptes rendus*, **245**, 1957, p. 2236.
(2) BARLOW, *J. Opt. Soc. Amer.*, **46**, 1956, p. 634.

ENDOCRINOLOGIE. — *Étude qualitative des corticostéroïdes libérés par la surrénale du Rat* in vitro *sous l'influence des hormones corticotropes antéhypophysaire et posthypophysaire*. Note de Mme **CÉCILE MIALHE-VOLOSS** et M. **ÉTIENNE-ÉMILE BAULIEU** (1), présentée par M. Robert Courrier.

In vitro, la surrénale du Rat libère, seule ou en présence des ACTH anté ou posthypophysaire de l'animal, de la corticostérone, de l'aldostérone et un Δ_4-3 céto-20.21 diol stéroïde X. Aucun 17α-OH-stéroïde n'a été détecté. Les deux ACTH ont le même effet qualitatif et quantitatif sur l'augmentation de la sécrétion des stéroïdes; ils stimulent davantage la sécrétion de la corticostérone que celle de l'aldostérone.

Dans des travaux antérieurs, l'un de nous (2) utilisant des extraits de lobes antérieur et postérieur d'hypophyse, a montré par le test de maintien du poids des surrénales, puis par le test de Sayers, l'existence d'une activité corticotrope dans la posthypophyse de différentes espèces animales. De plus, les lobes antérieur et postérieur de rat mis en survie dans du liquide de Krebs Ringer à 38° libèrent de l'hormone corticotrope (ACTH) que l'on peut mettre en évidence par le test de Sayers (3).

Dans le présent travail, nous avons déterminé qualitativement par chromatographie sur papier les corticoïdes libérés par la surrénale du Rat *in vitro*, incubée seule ou en présence d'ACTH anté ou posthypophysaire.

Matériel et technique. — Nous avons utilisé : 62 lobes postérieurs (LP) et 12 lobes antérieurs (LA) provenant de rats pesant 160 g ∓ 10, en six séries expérimentales. Dans un appareil de Warburg à 38°, nous mettons en incubation dans du liquide de Krebs Ringer (KR) pendant 1 h 50 d'une part 2 LA, d'autre part 10 LP. Le liquide d'incubation contient une certaine quantité d'hormone corticotrope qu'on fait agir sur des surrénales *in vitro* comme dans la technique de Saffran et Schally [4]. Les huit fioles contenant les surrénales sont réparties de la façon suivante : fiole I et II, 1,5 ml de KR; fioles III, IV et V, 1,2 ml de KR + 0,3 ml de liquide d'incubation de LA; fiole VI, VII et VIII, 1,2 ml de KR + 0,3 ml de liquide d'incubation de LP.

A la fin de l'expérience on recueille 1 ml de chaque fiole, auquel on ajoute 2 ml de dichlorométhane distillé; on agite, on centrifuge et l'on recueille la phase organique. On dose les Δ_4 — 3 cétostéroïdes en mesurant l'absorption à 240 mμ. On fait une seconde estimation selon la technique de Saffran et Schally en déterminant sur le spectrophotomètre de Beckman la différence des absorptions à 240 et 255 mμ, que l'on rapporte à 10 mg de poids frais des surrénales.

Le tableau exprime ces premiers résultats.

Séries.	Poids des surrénales dans chaque fiole (mg).			Poids hypophysaire (mg).	E (240) pour 10 mg de surrénales	E (240) pour 10 mg hypophyse.	E (240)-E (255) pour 10 mg de surrénales	E (240)-E (255) pour 10 mg hypophyse.
1...	28,1		28,8	Témoins	39,2		26,1	
2...	34,0		29,4		27,5		17,5	
3...	20,3		36		34,4		20,1	
4...	28,7		30,8		28,7		20,6	
5...	26,3		26,3		56,6		32,8	
6...	28,0		27,2		23,5		13,9	
	Moy.				34,9 ± 4,8	—	28,1 ± 3,9	—
1...	30,4	30,1	29,2	L.A. 8,6	117,7		74,9	
2...	35,5	29,8	31,3	10,9	104,5		65,4	
3...	33,6	31,5	39,7	9,9	106,7		66,8	
4...	33,3	31,5	29,1	9,0	115,9		74,5	
5...	26,2	29,9	26,2	9,1	166		81,8	
6...	27,7	25,9	25,7	9,5	101,1		62,1	
	Moy.			9,5	118,6 ± 9,7	124,8	70,9 ± 3	73,5
1...	32,9	28,8	28,6	L.P. 7,1	101,3		68,5	
2...	30,8	29,6	34,7	7,7	105,9		66,8	
3...	32,0	34,1	33,9	8,2	98,4		63,5	
4...	32,5	29,6	30,9	8,1	96,8		65,6	
5...	26,0	24,8	26,1	8,6	155,5		81,8	
6...	26,2	26,7	27,2	9,2	89,3		53,3	
	Moy.			7,8	107,8 ± 9,4	138,2	66,5 ± 2,7	85,2

La libération des corticostéroïdes Δ_4 — 3 cétoniques par milligramme de tissu hypophysaire est approximativement équivalente pour les lobes antérieur et postérieur.

Les extraits ont été *chromatographiés* sur papier dans les systèmes chloroforme-formamide (5), hexane-benzène-propanediol (6) et toluène-acétate d'éthyle-méthanol-eau (7). Les stéroïdes Δ_4 — 3 cétoniques ont été repérés par leur absorption dans l'ultraviolet (240 mμ) et leur fluorescence en lumière de Wood après chauffage en milieu sodique (7). Les stéroïdes α-cétolique ont été révélés par le bleu de tétrazolium. L'identification des stéroïdes est de plus permise par la mesure de leur migration dans plusieurs systèmes [en particulier pour l'aldostérone (8)], et la réaction à l'acide phosphorique (9). Une appréciation semi-quantitative des stéroïdes chromatographiés a été faite.

Résultats. — 1° Dans *tous* les extraits existent de la corticostérone, de l'aldostérone et une substance X ayant la même migration que le cortisol et présentant les réactions d'un Δ_4 — 3 cétostéroïde non α-cétolique; par oxydation chromique nous avons transformé ce corps X en une substance réagissant avec le triphényltétrazolium, ce qui permet de supposer un groupe diol 20-21 dans sa molécule. L'absence de fonction 17 α-OH peut, de plus, se déduire du résultat de l'oxydation par l'acide périodique (pas de 17-cétostéroïde formé) (10). Quantitativement la corticostérone l'emporte toujours sur X, qui est lui-même plus abondant que l'adostérone. D'autres substances connues (telle la 11-déhydrocorticostérone) ou non identifiées ont été détectées sur certains chromatogrammes.

2° Les trois stéroïdes sus-cités *augmentent* significativement sous l'effet de l'un ou de l'autre des ACTH. Les préparations anté et posthypophysaires ont *qualitativement* et *quantitativement* un *effet très voisin* sur la libération des corticostéroïdes. En valeurs absolue et relative, l'augmentation de la corticostérone l'emporte sur celle de l'aldostérone.

3° En présence comme en absence des deux ACTH il n'y a libération, ni de cortisone, ni de cortisol, ni de 17-hydroxy-11-désoxycorticostérone (S), qui sont tous des 17 α-hydroxy-cétostéroïdes ; dans de telles conditions, il n'y aurait donc pas d'activité 17 α-hydroxylasique de la surrénale de rat, ce qui infirme certains travaux (11), (12) et en précise d'autres (13), (14), (15). L'intérêt de ces expériences est dû à l'emploi de corticotrophines provenant de la même espèce que les surrénales sur lesquelles on les fait agir; on ne peut en effet être sûr d'obtenir une sécrétion normale de la part d'une surrénale soumise à l'action d'un ACTH non spécifique (16), (17).

Ces expériences complètent *in vitro*, certaines études faites *in vivo* (18) et établissent avec certitude, à côté de la régulation humorale (19), l'effet de l'ACTH du Rat sur la sécrétion de l'aldostérone. Par ailleurs, il faut

noter la similitude des effets provoqués par les corticotrophines antéet posthypophysaires; c'est un argument en faveur de l'origine antéhypophysaire de l'ACTH posthypophysaire.

(1) Avec la collaboration de Monique de Vigan.

(2) C. Mialhe-Voloss, *Comptes rendus*, 235, 1952, p. 743.
(3) C. Mialhe-Voloss, *Thèse de Sciences*, 1957 (sous presse).
(4) M. Saffran et A. V. Schally, *Endocrinol.*, 56, 1955, p. 523.
(5) D. Schinal et T. Reichstein, *Helv. Chim. Acta*, 34, 1951, p. 108.
(6) R. B. Burton, A. Zaffaroni et E. H. Keutman, *J. Biol. Chem.*, 188, 1951, p. 763.
(7) I. E. Bush, *Biochem. J.*, 50, 1952, p. 370.
(8) R. Neher et A. Wettstein, *J. Clin. Invest.*, 35, 1956, p. 800.
(9) R. Neher et A. Wettstein, *Helv. Chim. Acta*, 34, 1951, p. 2270.
(10) L. R. Axelrod, *Anal. Chem.*, 27, 1955, p. 1308.
(11) R. D. Heard et coll., *Rec. Pr. Horm. Res.*, 9, 1954, p. 383.
(12) A. B. Eisenstein, *Proc. Soc. exp. Biol. Med.*, 91, 1956, p. 657.
(13) A. K. Done et coll., *Proc. Soc. exp. Biol. Med.*, 83, 1953, p. 722.
(14) I. E. Bush, *J. Endocrinol.*, 9, 1953, p. 95.
(15) F. G. Hofmann, *Endocrinol.*, 54, 1956, p. 580.
(16) C. J. P. Giroud et coll., *Proc. Soc. exp. Biol. Med.*, 92, 1956, p. 855.
(17) A. T. Cohen, E. Bloch et E. Celozzi, *Proc. Soc. exp. Biol. Med.*, 95, 1957, p. 304.
(18) B. Singer et M. P. Stack-Dunne, *J. Endocrinol.*, 12, 1955, p. 130.
(19) A. B. Eisenstein et P. M. Hartroft, *Endocrinol.*, 60, 1957, p. 634.

(*Collège de France, Histophysiologie, et Faculté de Médecine, Chimie médicale.*)

HISTOPHYSIOLOGIE. — *Action du bleu trypan sur le blastème de régénération tentaculaire d'*Arion rufus *L.* Note de Mme **Monique Chétail**, présentée par M. Louis Fage.

La pycnose expérimentale de l'exoblastème, réalisée par des injections répétées de bleu trypan, entraîne l'absence de régénération de l'œil et du ganglion olfactif. Les cellules de l'endoblastème douées d'athrocytose pour le bleu trypan sont des histiocytes.

Pour compléter mes précédentes observations sur le blastème de régénération tentaculaire d'*Arion rufus* L. et pour préciser la nature de certaines catégories cellulaires du blastème, j'ai entrepris une étude expérimentale de la régénération au moyen d'injections de bleu trypan. Ce colorant est un colloïde électronégatif, il est donc athrocytable par les cellules histiocytaires et permet de les déceler; en outre, c'est un agent caryoclasique (1). Des solutions de bleu trypan, à des concentrations diverses, ont été injectées dans la cavité générale de jeunes *Arion rufus* L. amputés de la partie distale du tentacule oculaire gauche. Les injections ont été renouvelées tous les quatre jours environ; les pièces, après fixation au Susa, ont été coupées en série et colorées par le rouge nucléaire solide.

Pour faciliter la compréhension des résultats de cette expérience, il est nécessaire de rappeler quelques-uns des caractères du blastème de régénération tentaculaire d'*Arion rufus* L. que j'ai définis par ailleurs (²) et dans lequel j'ai distingué deux parties : l'exoblastème, d'origine épithéliale, évolue en trois phases successives d'une dizaine de jours chacune : une phase de latence, une phase de mitoses et une phase de différenciation; l'endoblastème se recrute à partir du bout proximal tentaculaire non réséqué et la mitose y joue un rôle assez effacé.

A. *Action du bleu trypan sur l'exoblastème.* — Durant la phase de latence de l'exoblastème les effets du bleu trypan ne sont pas perceptibles; par contre, durant la phase de mitoses qui s'étend du 10ᵉ au 20ᵉ jour après l'amputation et chez les sujets qui ont reçu des injections concentrées et répétées de bleu trypan, ce produit détermine une « crise caryoclasique » dans l'exoblastème où presque toutes les mitoses amorcées dégénèrent en pycnoses. Si l'on poursuit l'administration de bleu trypan au-delà du 20ᵉ jour, c'est-à-dire durant la phase de différenciation, dans bien des cas la régénération de l'œil et du ganglion olfactif est totalement inhibée ou pour le moins déficiente. Ainsi sur sept sujets qui auraient dû présenter un tentacule oculaire normalement régénéré, quatre étaient totalement dépourvus de cet organe, un présentait un ganglion olfactif imparfaitement régénéré et pas d'œil, deux possédaient bien un tentacule oculaire régénéré, mais beaucoup plus petit que dans les conditions normales. Il en résulte que l'exoblastème régénère l'œil et le ganglion olfactif puisque ceux-ci font totalement ou partiellement défaut après inhibition de la mitose dans l'exoblastème.

Précisons en outre, qu'à aucun moment de leur évolution les cellules de l'exoblastème n'athrocytent le bleu trypan; il ne s'agit donc pas de cellules histiocytaires.

B. *Action du bleu trypan sur l'endoblastème.* — Les mitoses sont rares dans l'endoblastème; ce fait, confirmé par la méthode à la colchicine, explique l'absence d'action caryoclasique du bleu trypan sur cette partie du blastème de régénération et suggère la probabilité d'une division directe des cellules de l'endoblastème, probabilité qui se trouve renforcée par la morphologie des noyaux et qui permet de rendre compte de l'accroissement de la population nucléaire en dépit de l'absence de mitoses.

Par contre, un grand nombre de cellules de l'endoblastème sont douées d'athrocytose pour le bleu trypan; l'endoblastème de régénération tentaculaire d'*Arion rufus* L. est donc en grande partie constitué de cellules à caractères histiocytaires; ces cellules sont libérées par les tissus anciens intéressés par la section et notamment par le tissu musculaire. La part qui leur revient dans la restauration des tissus régénérés proprement dits est difficile à préciser; il est certain qu'histiocytes et macrophages

jouent un rôle important dans le remaniement des parties anciennes et dans la résorption des cellules lésées.

Il est intéressant de rapprocher les résultats exposés ici des faits qui sont connus chez les Vertébrés chez lesquels l'intervention des histiocytes et des macrophages a été démontrée au cours de la régénération nerveuse, musculaire et osseuse par divers auteurs ([3]), ([4]), ([5]), avec des interprétations différentes il est vrai.

C. *Conclusions.* — Le bleu trypan injecté à des *Arion rufus* L. en cours de régénération tentaculaire a un double effet :

— il détermine une crise caryoclasique dans l'exoblastème, crise qui dans les cas extrêmes aboutit à l'absence définitive de l'œil et du ganglion olfactif;

— il décèle les propriétés d'athrocytose d'une grande partie des cellules de l'endoblastème prouvant ainsi leur nature histiocytaire.

([1]) A. P. Dustin, *C. R. Soc. Biol.*, **93**, 1925, p. 465.

([2]) M. Chétail, *Comptes rendus*, **242**, 1956, p. 1655.

([3]) M. Lecamp, *Bull. Biol.*, 77, 1943, p. 110.

([4]) H. Betz, *C. R. Soc. Biol.*, **141**, 1947, p. 1274; *Arch. Anat. Micr.*, **40**, 1951, p. 40 et 114.

([5]) L. David, *Arch. Anat. Micr.*, **30**, 1934, p. 217.

CYTOLOGIE. — *Étude, par la cinématographie en contraste de phase, de cultures de tissu thymique humain fœtal.* Note de M. **Roger Klein**, présentée par M. Antoine Lacassagne.

Présence de granules de taille uniforme dans des cellules épithéliales thymiques et dans des lymphocytes fœtaux; existence de relations entre ces deux types cellulaires.

En 1956, nous avons pu réaliser, dans le laboratoire du Professeur Pomerat à Galveston (Texas), des cultures de thymus, de rate et de foie de fœtus humains de 150 à 200 mm.

Les tissus coupés en petits fragments sont cultivés pendant trois jours en flacons, à même le verre, dans un milieu *homologue* composé de 50 % de liquide d'ascite humaine, 45 % de solution de Gey, 5 % d'extrait embryonnaire dilué au quart, avec 2,5 ml de rouge de phénol et 1 000 000 U de pénicilline par litre. Le milieu est changé aussi souvent que le nécessitent les variations de pH. Les fragments débarrassés des hématies et thymocytes sont récupérés de façon aseptique, recoupés et repiqués en chambre de Rose ([1]) dans le même milieu qu'on change alors le moins possible.

Les cultures peuvent rapidement être placées sous un microscope enfermé dans un incubateur à 37°, muni d'un condensateur à grande distance

focale, et cinématographiées pendant une longue durée. Nous avons suivi un lymphocyte pendant 12 h et filmé une culture de rate sans interruption

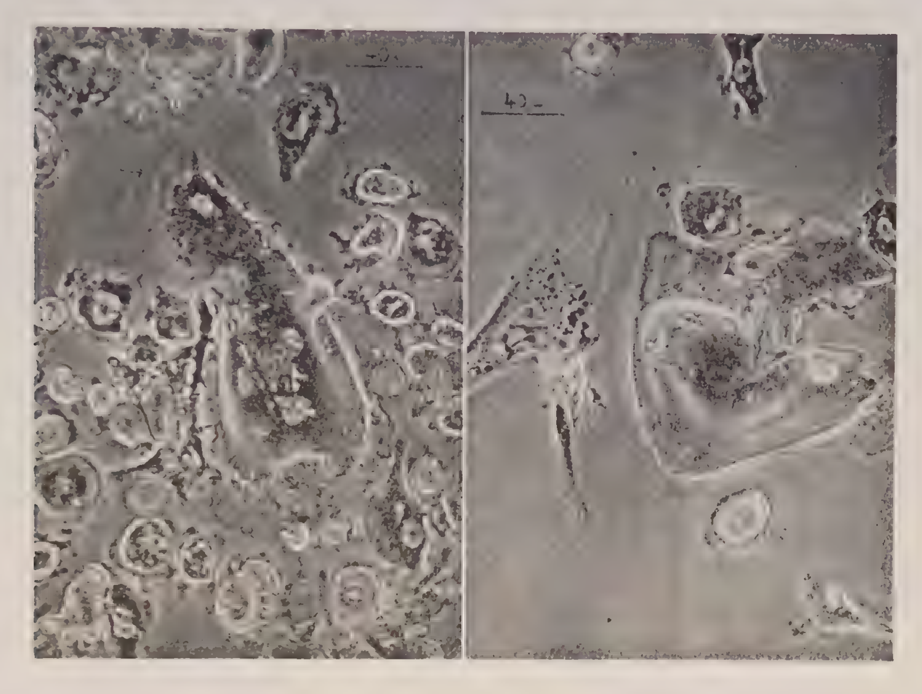


Fig. 1. Fig. 2.

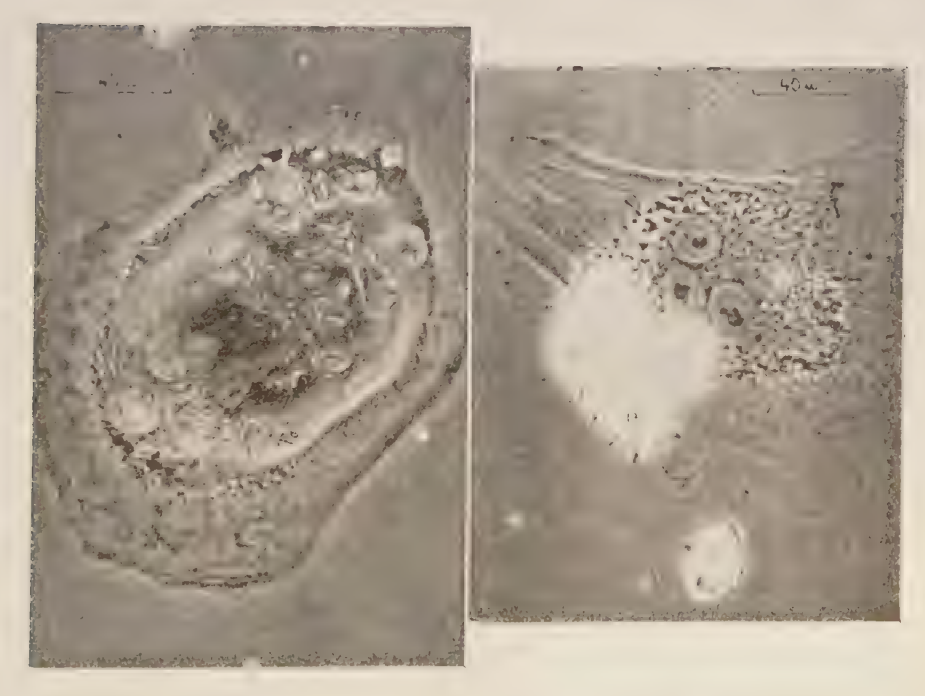


Fig. 3. Fig. 4.

pendant 15 jours. Cette technique permet donc d'étudier l'origine et la différenciation des cellules sanguines *in vitro*.

Dans une culture de thymus de 12 jours (*fig.* 1), on voit une cellule réticulaire épithéliale de 250 sur 150 μ qui présente une multitude de particules de taille sensiblement uniforme de 0,2 à 0,3 μ, parmi lesquelles on aperçoit des lymphocytes (*b*). D'autres lymphocytes situés à l'extérieur de la cellule, contiennent les mêmes granules dont certains paraissent passer directement de la cellule épithéliale à l'intérieur du lymphocyte (*a*) par les pseudopodes de celui-ci. Dans la frange de cytoplasme, on distingue des chondriocontes (*c*). D'après certaines de nos observations, nous inclinons à penser que des lymphocytes peuvent pénétrer dans ces cellules épithéliales et en sortir après un temps variable.

Dans la même culture de thymus (*fig.* 2 et 3), on distingue d'autres lymphocytes (*b*) au milieu des granulations de cellules épithéliales thymiques, et des chondriocontes (*c*) au bord du cytoplasme.

Dans une culture de thymus de trois semaines (*fig.* 4), on discerne dans une cellule épithéliale trinucléée deux types de mitochondries, les unes petites périnucléaires (*b*), les autres plus grosses périphériques (*a*). Au-dessus des thymocytes (*c*).

Ainsi nos images révèlent l'existence de lymphocytes vivants dans des cultures de thymus de trois semaines, la présence dans certaines cellules épithéliales de deux variétés morphologiques de mitochondries, et dans d'autres, à côté de chondriocontes, de granules de taille uniforme. Ceux-ci sont-ils semblables dans le tissu thymique originel ou leur nombre est-il accru par les conditions de culture ? Quelle est leur nature ? Des examens cytochimiques et en microscopie électronique permettront sans doute de l'établir.

Les clichés paraissent aussi confirmer les observations de Jolly [2] de la pénétration des lymphocytes dans des cellules épithéliales thymiques, et les hypothèses de Hamilton [3], de Medawar [4], les images de Trowell [5], de la phagocytose des lymphocytes dans les cellules réticulaires ganglionnaires et thymiques et de leur réutilisation pour la formation de nouveaux lymphocytes.

Andréasen [6] a montré que le thymus était le principal producteur de lymphocytes de l'organisme. Hammar [7] reprenant les hypothèses de Dustin [8] et de Jolly [9] a évoqué la possibilité qu'il constitue un réservoir de nucléoprotéines pour les besoins de la croissance et qu'il intervienne dans la phase initiale du mécanisme de l'immunité.

Les granules que nous avons mis en évidence dans les cellules épithéliales ne joueraient-ils pas un rôle, par l'intermédiaire des lymphocytes, dans ces fonctions du thymus ?

(1) G. Rose, *Tex. Rep. Biol. Med.*, 12, 1954, p. 1074.
(2) J. Jolly et C. Lieure, *Arch. Anat. Microsc.*, 28, 1932, p. 159.
(3) L. D. Hamilton, *The Leukemias* Ac. Press, New-York, 1957.
(4) P. B. Medawar, *Ann. N. Y. Acad. Sc.*, 68, 1957, p. 255.
(5) O. A. Trowell, *J. Bioph. Bioch. Cyt.*, 3, 1957, p. 317.
(6) F. Andréasen et S. Christensen, *Anat. Rec.*, 103, 1949, p. 401.
(7) J. A. Hammar, *Die Normal-Morphologische Thymusforschung* Barth, Leipzig, 1936.
(8) A. P. Dustin, *Arch. Int. Med. Exp.*, 3, 1927, p. 367.
(9) J. Jolly, *C. R. Soc. Biol.*, 83, 1920, p. 1209.

BIOLOGIE. — *Pontes provoquées et pontes de femelles vierges chez la race bisexuée de* Lepidurus apus (*Leach*) (*Crustacé Phyllopode Notostracé*). Note de M. **Jean Chaigneau**, transmise par M. Albert Vandel.

La présence du ♂ chez les *Lepidurus apus* d'une nouvelle station des Deux-Sèvres, n'est pas indispensable pour la ponte des ♀♀, bien que les deux sexes soient en nombres assez voisins. Ceci est contraire aux observations faites sur des *L. apus* d'autres stations françaises de la race bisexuée. Ces pontes sont cependant exceptionnelles et, de plus, stériles.

Campan (1) a remarqué que des ♀♀ de *Lepidurus apus* (Leach) toulousains « isolés après leur ponte sont incapables de remplir à nouveau leurs poches incubatrices ». En présence du ♂ les poches se remplissaient à nouveau. Desportes et Andrieux (2), après avoir isolé de 3 à 6 jours des ♀♀ de *L. apus* du Loiret, concluent à la présence indispensable du ♂ pour la ponte.

J'ai trouvé à Amuré (Deux-Sèvres), à 15 km à l'Ouest de Niort, une nouvelle station de *L. apus* (L.) où la proportion des ♂♂, relevée plusieurs fois pendant les trois dernières saisons, est notable; elle est en effet le plus souvent voisine de 40 %, ce qui est une proportion de race bisexuée. J'ai cherché à voir si les animaux de cette station se comportaient comme ceux de Toulouse ou du Loiret, ou si au contraire la présence du ♂ n'était pas indispensable pour induire la ponte [comme c'est le cas chez les races nordiques où les ♂♂ sont rarissimes ou inconnus, ce qui implique une reproduction parthénogénétique, Vandel (3)].

Au cours des printemps 1956 et 1957, l'élevage des *L. apus* a été réalisé au moyen d'œufs recueillis au Laboratoire à partir d'élevages d'individus des deux sexes. Ces œufs furent desséchés et remis dans l'eau au bout d'un an. Sur 47 éclosions il y eut 8 adultes dont 6 ♀♀. Par ailleurs, pour avoir du matériel plus abondant, 71 jeunes *Apus* de 2 à 5 mm récoltés à la station furent isolés et donnèrent 28 adultes dont 24 ♀♀; tous ces animaux furent dès le début isolés chacun dans un cristallisoir. On remarquera à cette occasion le fort pourcentage de ♀♀, bien supérieur à celui observé dans la nature. On peut l'attribuer à la plus grande fragilité des ♂♂ placés

dans des conditions d'élevage non parfaites. Ceci est en accord avec les observations de Baudouin, Campan et de Larambergue [4] qui ont constaté une disparition plus rapide des ♂♂ au cours de la saison, ainsi que de Massal [5] qui insiste à propos du groupe voisin de Anostracés, sur la plus grande mortalité d'un des deux sexes quand on élève ces animaux.

Enfin, à de nombreuses reprises, des *Apus* adultes furent pris à la station et élevés un certain temps en aquarium, avec d'ailleurs là aussi une bien plus grande mortalité chez les ♂♂, surtout pendant le transport.

Pontes provoquées par le ♂. — Les expériences ont porté d'une part sur des ♀♀ de la station ayant vidé leurs poches incubatrices, d'autre part sur un certain nombre de ♀♀ nées ou élevées très jeunes au laboratoire et vierges. Les animaux étaient examinés deux fois par jour.

Dans le premier cas, une expérience portait sur six ♀♀ récoltées sans œufs dans les poches incubatrices le 2 mai 1956 et toujours dans le même état le 9 mai. A cette date les ♀♀ furent séparées en deux lots de 3. A 12 h 15 un ♂ était mis avec un des lots. A 18 h 30, deux des ♀♀ avaient des œufs dans les deux poches incubatrices. A minuit les trois ♀♀ avaient leurs poches pleines d'œufs et ceci jusqu'au 24 mai, sauf quelques interruptions de 1 ou 2 jours chez chaque ♀ pour la ponte définitive. Le ♂ étant mort, il n'y eut plus alors aucune ponte chez ces ♀♀ bien qu'elles soient mortes plus de 15 jours après.

Les trois ♀♀ témoins ne remplirent jamais leurs poches incubatrices bien qu'elles vécurent aussi longtemps que les trois autres.

D'autre part, les deux lots furent intervertis de bac le 15 mai sans que le fait, pour les trois ♀♀ témoins, d'être dans l'eau où avait séjourné un ♂ provoque leur ponte.

Dans le cas des ♀♀ vierges, 5 à 30 obtenues comme nous l'avons dit, âgées de 1 mois 1/2 à 2 mois, mises chacune avec un ♂, emplirent leurs poches incubatrices 4 à 12 h après.

Dans toutes les expériences similaires, c'est toujours dans les quelques heures qui suivent la mise en présence des deux sexes que la ponte se produit. L'induction de la ponte par la présence même du ♂ (vraisemblablement par l'accouplement) est donc ici parfaitement démontrée.

Pontes des ♀♀ vierges. — Sur 25 ♀♀ vierges maintenues isolées et examinées deux fois par jour, 6 emplirent leurs poches incubatrices, l'une trois fois, les autres une seule fois, et ceci 1 mois à 1 mois 1/2 après avoir atteint une taille où les ♀♀ de la station pondaient.

Les pontes de 1956 ne purent être retrouvées dans la vase des bacs d'élevage; cette vase remise dans l'eau au début de 1957, après dessèchement et passage au froid, ne donna point d'*Apus*. En mai 1957 les pontes suivantes furent recueillies :

13	œufs, dont	2	d'aspect normal,
9	»	5	»
12	»	3	»

(Les autres de forme très irrégulière, la coque percée et vide.)

Une ♀ vierge mourut avec 9 œufs dans une de ses poches incubatrices, tous d'aspect normal avec vitellus abondant.

(Une ponte disparut avant d'avoir été examinée, sans doute dévorée.)

Les quelques œufs normaux examinés ou fixés à la ponte montrèrent tous une coque et un vitellus normaux. Les autres, au nombre de 6, furent gardés intacts; j'ai essayé de les faire éclore par assèchement peu après la ponte et remise dans l'eau au début d'octobre. Trois semaines après, aucun n'étant éclos, ils subirent un choc thermique pendant 12 jours entre 3° et — 2°. En fin décembre, aucune éclosion ne s'était produite et les œufs n'étaient plus que des coques vides. Or plus de 100 œufs de ♀♀ accouplées et placés dans les mêmes conditions pour d'autres expériences, s'ouvrirent dans une proportion supérieure à 50 %, les œufs non ouverts ayant presque sans exception leur vitellus intact au bout de plus de 3 mois.

Il n'a jamais été constaté de ponte chez les 19 autres ♀♀ vierges conservées en élevage de la mi-mars, début avril jusqu'en fin mai, début juin; 2 d'entre elles, nées en fin mars 1957, vécurent même jusqu'au début de juillet, soit deux mois après l'assèchement de la station, la taille atteinte étant nettement supérieure à la moyenne de la station.

Conclusion. — Le ♂ n'est donc pas indispensable pour la ponte des ♀♀ des *L. apus* d'Amuré. Une telle ponte cependant doit être considérée comme anormale, puisqu'elle ne fut observée que chez 6 ♀♀ vierges sur les 25 isolées, et encore 5 ne pondirent qu'une fois, alors que des ♀♀ élevées avec des ♂♂ remplissent et vident leurs poches incubatrices au moins tous les 4 ou 5 jours. Par ailleurs, le nombre d'œufs contenu dans les poches incubatrices des ♀♀ vierges a toujours été inférieur à celui qu'on trouve chez les ♀♀ de la station (30 à 40 chez ces dernières). Enfin, ces œufs se sont montrés stériles. Mais il est cependant possible que, dans certaines conditions, ils puissent se développer parthénogénétiquement, comme c'est la règle chez les races nordiques.

(1) *Bull. Soc. Zool. Fr.*, 54, 1929, p. 95-118.
(2) *Bull. Soc. Zool. Fr.*, 69, 1944, p. 61-68.
(3) *Comptes rendus*, 178, 1924, p. 1759.
(4) *Bull. Soc. Zool. Fr.*, 62, 1937, p. 423.
(5) 70e *Congrès A. F. A. S.*, 1951, fasc. IV, p. 1-8.

(Laboratoire de Zoologie de la Faculté des Sciences de Poitiers.)

BIOLOGIE DES INSECTES. — *Influence de l'accouplement et de la fécondation sur la différenciation du sexe et la formation du bouclier protecteur chez* Pseudaulacaspis pentagona *Targ.* (Homoptera Diaspidinæ). Note de M. **Claude Benassy**, présentée par M. Émile Roubaud.

Chez la Cochenille Diaspine *Ps. pentagona* Targ., l'accouplement et la fécondation sont à l'origine de changements importants, d'ordre sexuel, dans la pigmentation de l'œuf et des larves qui en procèdent. Chez les femelles non fécondées on note une simple modification du bouclier protecteur.

La majorité des Cochenilles Diaspines sont ovipares, quoique l'on observe fréquemment, chez différentes espèces, des cas d'ovoviviparité ou de viviparité. Les œufs donnent naissance à des larves douées d'une grande mobilité et indifférenciables sexuellement. Fixées, elles perdent, dès la première mue, leurs appendices et la dépouille forme un bouclier rigide sous lequel s'abrite la larve du deuxième stade. Elles évoluent alors de façon différente suivant le sexe. La larve mâle, dans son follicule ou sous son bouclier, suivant le type, effectue deux mues nouvelles qui la transforment en un adulte ailé. La larve femelle mue une seule fois et son bouclier s'arrondit parallèlement à son augmentation de taille.

Chez *P. pentagona* Targ., espèce ovipare, des observations biologiques réalisées dans la nature, durant deux ou trois générations qui se succèdent annuellement, nous ont montré l'existence, dès l'éclosion, de deux types larvaires nettement distincts par leur couleur. Le premier, groupe des jeunes larves blanchâtres, contrastant avec celles du deuxième type, pigmentées en rouge. Le même fait est observé dans les élevages expérimentaux sous conditions constantes (température 27° C, H. R. 60-70 %), la Cochenille vivant fixée sur tubercule de pomme de terre.

Pour contrôler l'évolution de ces deux types larvaires, nous les avons mis en élevages séparés. Les larves mobiles blanchâtres donnent des individus mâles; parallèlement les néonates rouges sont à l'origine des individus femelles.

Or, à l'extérieur, comme en élevage de laboratoire, la ponte des femelles de *P. pentagona* groupe en nombre variable des œufs différemment pigmentés. Le cas extrême : ponte uniforme d'œufs d'une seule couleur, s'observe aussi souvent. Nous retrouvons, pour les œufs, les deux groupes précédemment définis pour les larves mobiles : des œufs non pigmentés, blanchâtres ou rosés et des œufs pigmentés, depuis le jaune orangé jusqu'au rouge. Des élevages isolés nous ont montré que les œufs non pigmentés sont à l'origine des larves mobiles blanchâtres qui évoluent en mâles; des œufs pigmentés éclosent des larves mobiles rouges qui se transforment en femelles.

A ces deux types d'œufs, L. Monti (1955) ([1]) en ajoute un troisième, celui groupant des œufs de couleur jaune paille, sans indiquer cependant leur descendance. Jusqu'à ce jour nous n'avons pas retrouvé de tels œufs. Donc, dès la ponte, chez *P. pentagona* Targ., les œufs sexuellement différents, sont morphologiquement distincts par leur pigmentation.

L'étude de l'évolution ovarienne nous a montré que la différence de pigmentation apparaît très tôt sur les œufs encore en place dans les ovarioles, ce qui indique une différenciation précoce du sexe. Ce fait n'est pas en contradiction avec l'hypothèse d'un déterminisme chromosomique des

sexes comme cela a été indiqué dans le cas des Pseudococcines (F. Schrader, 1923 *a*, *b*) [2], ou des Lécanines [N. Thomsen, 1927 [3]].

En effet, la fécondation des ovules chez les Cochenilles se fait dans l'ovariole (A. S. Balachowsky, 1939) [4], le transport des spermatozoïdes jusqu'à leur voisinage étant assuré par une cellule spéciale (P. Pesson, 1950) [5].

De plus, nous avons pu montrer que la parthénogenèse est impossible et que l'accouplement et la fécondation, même différés, sont indispensables pour obtenir le déclenchement d'une ponte normale.

Il est à noter que ces mêmes phénomènes interviennent également dans le processus de formation des boucliers femelles.

En effet, si nous élevons séparément des Cochenilles femelles ou si nous supprimons, avant la deuxième mue, toute la lignée mâle, les individus non accouplés sécrètent un bouclier aberrant. D'apparence normalement mate et vitreuse, de forme convexe, circulaire ou subcirculaire avec l'exuvie de la larve du premier âge centrale ou subcentrale, il devient floconneux et brillant et s'allonge sans forme définie. Il prend grossièrement l'aspect d'une femelle de *Pulvinaria* ayant sécrété son ovisac, où la position du bouclier femelle de la Lécanine est occupé dans ce cas par l'exuvie larvaire de *P. pentagona*. La femelle allonge son rostre et se déplace parallèlement à la sécrétion du bouclier vers l'autre extrémité.

Si, dans un tel élevage, nous procédons à des essais d'accouplement différés, la sécrétion régulière d'un bouclier normalement confectionné fait bientôt suite à celle incoordonnée du début.

Chez une espèce voisine, *E. leperii* Sign., P. W. Geier (1949) [6] a analysé le processus de formation du bouclier : il est sécrété d'une façon ininterrompue par les glandes tégumentaires ornant le pygidium de l'Insecte, et sa forme est assurée par le lent pivotement de tout le corps de la Cochenille autour de l'axe du rostre. De plus, l'aspect vitreux du follicule est le résultat de deux sécrétions : la première produit des filaments cireux qui sont dissous par une deuxième substance diluante, sous-produit du métabolisme. L'insuffisance d'une telle sécrétion expliquerait les quelques cas de boucliers aberrants observés par l'auteur chez les femelles d'*Epidiaspis leperii* Sign.

Tel serait aussi le cas chez *P. pentagona* Targ. pour les femelles non accouplées, où la consistance du bouclier formé est intermédiaire entre celui d'une femelle typique et celui du follicule mâle. Les troubles physiologiques liés à l'ovogenèse incohérente que nous observons par dissection chez de telles femelles, affecteraient donc la sécrétion normale de la substance diluante et, de plus, inhiberaient pour ces femelles vierges les possibilités de se déplacer autour de leur rostre; ce mouvement serait remplacé par une oscillation de l'extrémité du pygidium, assurant de proche en proche l'allongement du bouclier.

Ainsi, non seulement l'accouplement et la fécondation conditionnent la possibilité de reproduction de *P. pentagona*, mais ils provoquent deux types de modifications morphologiques importantes :

1° la pigmentation de l'œuf probablement liée à un déterminisme chromosomique;

2° la formation du bouclier en agissant sur l'activité sécrétrice et le comportement de la femelle.

(1) L. MONTI, *Boll. Entom. Bologna*, 21, 1955, p. 148-149.
(2) F. SCHRADER, *Z. indust. Abst. Vereck.*, 30, n° 3, 1923 *a*, *b*, p. 163; *in* Balachowski, 1939.
(3) N. THOMSEN, *Z. Mikr. anat*, 5, 1927; *in* Balachowski, 1939.
(4) A. S. BALACHOWSKI, Hermann et Cie, Paris, 1939, 154 pages.
(5) P. PESSON, *C. R. 8e Congr. Int. Entomol.*, Stockholm, 1950, p. 1-5.
(6) P. W. GEIER, *Rev. Path. Veg. Ent. Agric. Fr.* 28, n° 4, 1949, p. 207-221.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Les variations de la composition nucléotidique du lait de Brebis : Influence de l'activité sécrétoire de la glande mammaire.* Note (*) de MM. **ROBERT DENAMUR, GUY FAUCONNEAU** et Mlle **GENEVIÈVE FUNTZ**, présentée par M. Maurice Lemoigne.

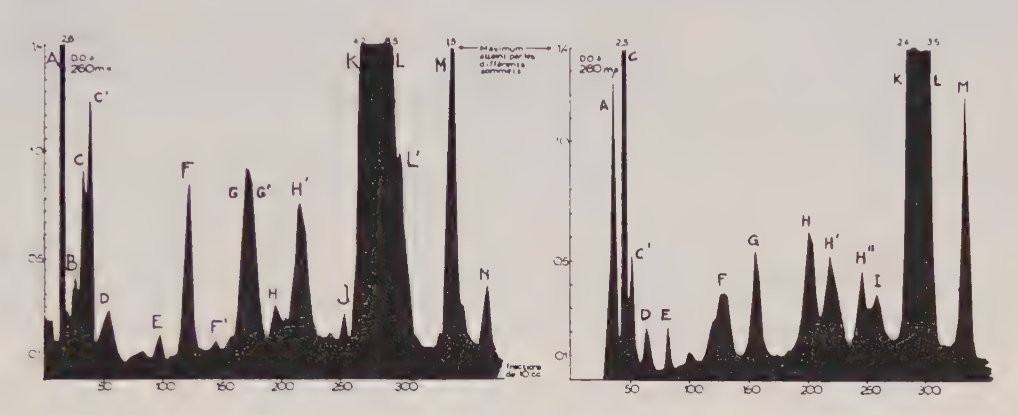
Les nucléotides du lait de brebis représentent une proportion importante du phosphore organique acido-soluble. Les nucléotides monophosphates et polyphosphates des quatre bases : adénine, cytosine, guanine, uracile, suivent des évolutions différentes au cours de la lactation.

La présence des nucléotides identifiés dans le lait de brebis (1) est dans l'état actuel de nos connaissances, difficilement interprétable. Il nous a paru intéressant de connaître la composition nucléotidique du lait, considérée sous l'aspect dynamique des variations quantitatives et qualitatives au cours de la lactation. En outre, l'étude des nucléotides de la glande mammaire est en cours et fera l'objet d'une publication ultérieure.

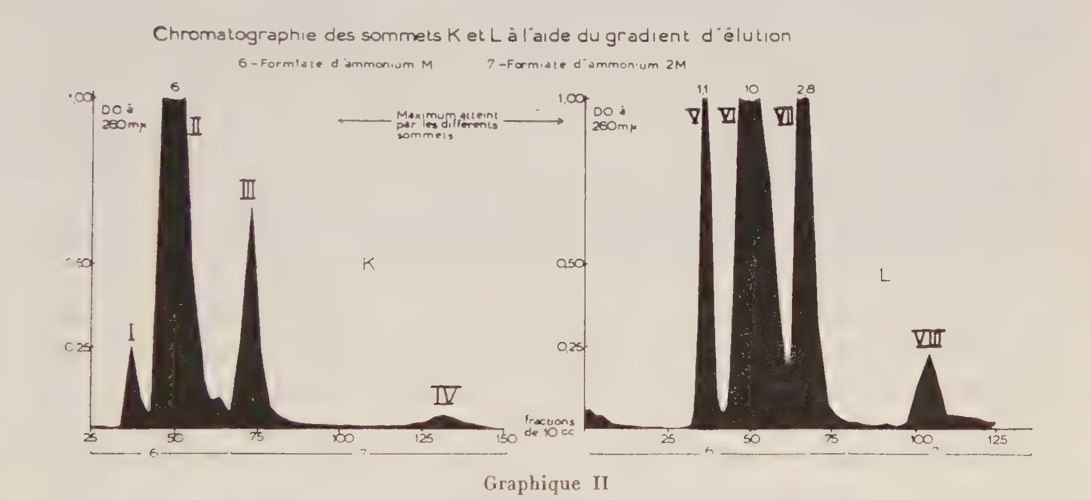
Les échantillons de lait ont été prélevés depuis la phase colostrale jusqu'à la fin de la lactation : 3, 5, 24 et 30 h, 16e, 31e, 90e, 110e, 160e et 170e jour, après la parturition. Les extraits trichloracétiques ont été chromatographiés selon Hurlbert et coll. (2) et l'identification réalisée selon le schéma indiqué dans la Note précédente.

Le graphique I représente les histogrammes des fractionnements primaires de deux laits correspondant à deux phases sécrétoires très différentes. Ces images montrent que la quantité totale des nucléotides ainsi que leur proportion varient avec le stade de lactation. Cependant les sommets K et L sont toujours les plus importants. Le graphique II représente les histogrammes correspondant aux fractionnements secondaires

des sommets K et L, et le tableau I indique le pourcentage des constituants trouvés dans chacun d'eux.



Graphique I. — Chromatographie des nucléotides d'un colostrum (4 h après la parturition) et d'un lait en fin de lactation (170ᵉ jour).



Graphique II

TABLEAU I.

Fractionnements secondaires des sommets K *et* L
(en pour-cent des micromolécules trouvées dans chaque sommet) (*).

	UMP.	UDP Hexosamine.	UDP glucose et galactose.	UDPX et UDP.	GDP.
K.......	2,2 (I)	87,8 (II)	0,42 (II)	8,07 (III)	1,08 (IV)
L.......	4,9 (V)	–	76,7 (VI)	16,6 (VII)	1,8 (VIII)

(*) U, uridine; G, guanosine; MP, monophosphate; DP, diphosphate; X, composé inconnu en cours d'identification.

Les quantités de chaque nucléotide ont été calculées d'après leur absorption à 260 mμ. Il ne nous est pas possible de rapporter dans cette courte

Note les variations de tous les nucléotides identifiés; nous avons donc résumé leur évolution en indiquant celle des quatre bases puriques et pyrimidiques.

TABLEAU II.

Évolution des bases contenues dans les nucléotides au cours de la lactation.

		Colostrum.		Lait.		
		3 h-5 h.	24 h-30 h.	16ᵉ au 31ᵉ jour.	90ᵉ au 110ᵉ jour.	160ᵉ au 170ᵉ jour.
Micromolécules totales par 100 cm³....		450	570-717	300-320	266-270	140-155
(%) des micromolécules totales retrouvées	Adénine.....	6-8	5- 7	12-15	5-6	4
	Guanine.....	5-6	8-10	13	13	18-20
	Uracile......	75	74	73	73	62-65
	Cytosine....	6-7	5- 6	6-7	6-7	12-14

La concentration des nucléotides totaux est particulièrement élevée dans les colostrum, puis diminue progressivement au cours de la lactation. La proportion de chaque nucléotide présente également des variations. Les uridines nucléotides décroissent lentement bien qu'ils restent toujours quantitativement les plus importants. Les adénosines nucléotides présentent un maximum entre le 15ᵉ et le 30ᵉ jour de lactation, ce qui chez la Brebis correspond à une activité sécrétoire plus intense. Les guanosines nucléotides ont une augmentation lente et continue tandis que les cytidines nucléotides sont abondants vers la fin de la lactation.

Les nombreux composés phosphorés déjà identifiés (phosphocréatine, phosphopeptides, etc.) ne représentent qu'une faible proportion de la fraction « phosphore organique acido-soluble » du lait. La plus grande partie de cette fraction jusqu'ici non identifiée est représentée par les nucléotides dans le lait de brebis. Le tableau III montre l'importance quantitative des nucléotides dans le colostrum de 27 h.

TABLEAU III.

(Exprimé en milligrammes par litre de colostrum de 27 h.)

Phosphore acido-soluble				Bases puriques et pyrimydiques.	Azote acido-soluble		Sucres liés identifiés.
		nucléotidique					
total.	organique.	total.	des di- et tri-phosphates.		des bases.	total.	
1 250	500	400	375	807	245	740	720

La proportion dominante des uridines nucléotides, ainsi que les évolutions relatives des nucléotides semblent indiquer que ces composés ne proviennent pas d'une simple filtration sanguine. Les variations de la

teneur en nucléotides du lait seraient le reflet des modifications de l'activité métabolique de la glande mammaire.

(*) Séance du 20 janvier 1958.

(1) R. Denamur, G. Fauconneau et G. Guntz, *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 492.

(2) R. B. Hurlbert, H. Schmitz, A. G. Brumm et A. E. Potter, *J. Biol. Chem.*, 209, 1954, p. 23.

(Institut National de la Recherche agronomique, Jouy-en-Josas, Seine-et-Oise.)

PARASITOLOGIE. — *Le développement d'*Opisthioglyphe ranæ (*Fröhlich*), *Trématode Plagiorchidé*. Note (*) de MM. **Charles Joyeux** et **Jean-G. Baer**, présentée par M. Pierre-P. Grassé.

Nous avons déjà relaté certaines particularités du cycle évolutif de *O. ranæ* (1). Nous en poursuivons l'étude et mentionnons sommairement ici quelques faits nouveaux, sur lesquels nous reviendrons dans une Publication ultérieure avec plus de détails.

Rappelons le cycle de *O. ranæ* classiquement admis (Sinitzin, 1905) : adultes dans l'intestin des Amphibiens; sporocystes et cercaires chez des Limnées spp.; enkystement des cercaires chez des larves d'Amphibiens, dans le pied musculeux de Mollusques, occasionnellement chez d'autres animaux d'eau douce; infestation des Amphibiens adultes en dévorant ceux-ci. Carrère (1935) a réalisé le cycle condensé à deux hôtes en infestant les larves d'Amphibiens : les cercaires pénètrent par voie buccale au cours de la respiration aquatique, s'enkystent, notamment dans la cavité buccopharyngienne. Pendant la métamorphose, les kystes proches de la lumière du tube digestif tombent dans celle-ci; les métacercaires éclosent dans l'intestin et s'y développent.

Chez l'Amphibien adulte, le cycle condensé est un peu différent. La respiration aquatique n'existant plus, les cercaires absorbées par la bouche sont entraînées principalement dans l'intestin et s'enkystent dans sa paroi. Les métacercaires éclosent au bout de quelques jours et se développent dans la lumière intestinale. Les Trématodes devenus adultes commencent à émettre des œufs dans les selles 22 jours en moyenne après absorption des cercaires.

Dans l'accomplissement de tous ces cycles, il y a d'importants déchets provenant de la mort de nombreux kystes qui dégénèrent sans éclore.

Dans le centre de la France où nous faisons nos observations, on rencontre des Amphibiens hôtes défavorables et d'autres favorables. Les premiers sont représentés par les Crapauds généralement indemnes dans la nature et difficiles ou impossibles à infester expérimentalement : *Bufo calamita*

Laur.; *Pelodytes punctatus* (Daud.); *Alytes obstetricans* Laur.; *Bombina salsa* (Schr.). La Grenouille agile, *Rana dalmatina* Bonap. est rarement parasitée (1 sur 30), expérimentalement on arrive parfois à l'infester (2 sur 7).

Triturus helveticus (Raz.) Triton palmé, contracte le parasite au début de l'année pendant son séjour aquatique; mais ses Trématodes disparaissent lorsqu'il adopte des mœurs terrestres. Pendant l'année 1954, sur 56 Tritons récoltés en milieu aquatique, nous en avons trouvé 11 parasités. Ultérieurement, 28 de même origine, mais en habitat terrestre, étaient indemnes. Expérimentalement, les jeunes Tritons infestés à l'état larvaire, perdent leurs parasites 11 à 54 jours après leur métamorphose, ayant adopté des mœurs terrestres à ce moment. Les métacercaires restées dans les kystes ne sont pas réactivées l'année suivante par un nouveau séjour aquatique.

Rana esculenta L. peut être facilement infestée à l'état de têtard ou d'adulte, suivant le cycle à deux ou trois hôtes. Elle héberge des parasites pendant toute l'année; c'est, dans notre région, le seul Vertébré capable de conserver *O. ranæ* d'une année à la suivante (*R. temporaria* L. est pratiquement inexistante).

Nous avons commencé à étudier la protection conférée par infestations successives. Nous avons utilisé la Grenouille rainette, *Hyla arborea* L. rare dans notre région, que nous récoltons à Marseille. Elle peut être considérée comme animal neuf, car elle est toujours indemne de Trématodes intestinaux au moins dans les gîtes que nous connaissons. En outre, plusieurs examens de selles sont toujours faits avant l'expérimentation.

La longévité de *O. ranæ* chez *H. arborea* a varié dans nos expériences de sept mois à un temps beaucoup plus long, les animaux ayant été sacrifiés au bout de 12 mois hébergeant encore leurs parasites.

La protection contre une seconde infestation diffère suivant que les parasites de la première infestation ont été évacués ou persistent encore lorsque la seconde est pratiquée. Pour obtenir des résultats plus nets, nous opérons avec le cycle à trois hôtes, ce qui permet, avant l'infestation, de compter au microscope le nombre de kystes contenus dans le fragment de tissu qui sera absorbé.

Lorsque les parasites correspondant à la première infestation ont été évacués au moment où la seconde a lieu, les examens de selles demeurant négatifs, on observe des phénomènes de prémunition généralement nets; la seconde infestation se développe normalement. Au début de cette recherche, il importe de sacrifier la Grenouille peu de jours après la seconde infestation, de façon à s'assurer que les parasites sont très jeunes, ne pouvant être confondus avec les adultes émetteurs d'œufs existant précédemment.

Dans le cas contraire : parasites de la première infestation encore vivants

au moment de la seconde, un certain nombre de kystes libèrent leurs métacercaires, lesquelles pénètrent dans la paroi intestinale et s'y réencapsulent. L'infestation ayant été pratiquée avec des kystes, nous sommes certains que les métacercaires se sont bien dégagées avant leur pénétration. Dans une observation, un seul kyste absorbé ayant donné un adulte, sa présence a suffi pour provoquer le réencapsulement lors de la seconde infestation. Nous reviendrons sur ces faits en donnant plus de détails dans un prochain travail.

Le Mollusque *Limnæa ovata* Drap. est l'hôte intermédiaire le plus important dans notre région. Son comportement varie suivant les années; l'indice parasitaire de la glande digestive, suivi pendant dix années au même gîte, a oscillé de 2 à 100 %. Il était établi en automne, au moment où il est le plus élevé, après s'être accru depuis le début de la saison chaude. *L. ovata* conserve ses parasites pendant l'hiver; leur développement est ralenti pendant les grands froids, il reprend dès les premiers beaux jours. C'est donc ce Mollusque et, à un degré probablement moindre, *Rana esculenta*, qui hébergent le parasite pendant l'hiver et sont capables, dans notre région, de le transmettre d'une année à l'autre.

Toutefois les *L. ovata* adultes seules sont aptes à jouer ce rôle. Nous avons eu l'occasion d'observer dans la nature un gîte où se trouvaient uniquement de jeunes Limnées, mesurant au maximum 10 à 12 mm de long, les formes adultes ayant été détruites. Infestées par des miracidia de *O. ranæ*, elles ont montré des sporocystes et des cercaires d'apparence normale, mais quelques-unes de ces dernières seulement ont pu pénétrer chez les hôtes habituels et devenir adultes; les autres n'y sont pas parvenues, malgré divers artifices expérimentaux (abondante nourriture des Mollusques, élévation de la température de l'aquarium). Aux premiers froids de l'automne, toutes les formes larvaires ont péri dans les glandes digestives. Nous pensons que cette déficience et cette mortalité sont dues à la trop grande jeunesse des Mollusques, encore incapables de nourrir leurs parasites. Nous avons déjà eu l'occasion d'observer des phénomènes semblables à propos d'autres Trématodes.

(*) Séance du 25 février 1957.
(1) *Bull. Soc. neuchâteloise des Sc. Nat.*, 1953, p. 63-86.

A 16 h 10 m l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16 h 50 m.

L. B.

ERRATA.

(*Comptes rendus* du 12 juin 1957.)

Note présentée le même jour, de MM. *Félix Bertaut*, *Pierre Blum* et Mlle *Augusta Sagnières*, La structure du ferrite dicalcique et de la brownmillerite :

Page 2946, 15e ligne, *au lieu de* Ca en 8 *d* (0,028; 0,012; 0,480), *lire* Ca en 8 *d* (0,028; 0,112; 0,480).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances de décembre 1957.

(*Suite et fin.*)

Institut des Parcs nationaux du Congo belge. Exploration du Parc national de la Garamba. Mission H. De Saeger. Fasc. 8 *Nématodes parasites d'oiseaux*, par Claire Vuylsteke. Bruxelles, 1957; 1 fasc. 28 cm.

Id. Exploration du Parc national Albert, Mission J. de Heinzelin de Braucourt. Fasc. 3. *Mollusques quaternaires de la Région du lac Edouard*, par William Adam. Bruxelles, 1957; 1 fasc. 28 cm.

Id. Exploration du Parc National Albert. Deuxième série. Fasc. 4. *Coagulation du sang chez les Arthropodes*, par Charles Grégoire et Pierre Jolivet. Bruxelles, 1957; 1 fasc. 28 cm.

Id. Exploration du Parc National de l'Upemba. Mission G. F. De Witte. Fasc. 43. 1. *Issidae* (*Homoptera-Fulgoroidea*). 2. *Meenoplidae* (*Homoptera-Fulgoroidea*). 3. *Cercopidae* (*Hemiptera-Homoptera*), par Henri Synave. Fasc. 48. *Trematoda*, by Stephen Prudhoe. Bruxelles, 1957; 2 fasc. 28 cm.

Epifysiolysis capitis femoris en monografi og efterundersøgelse med særligt henblik paa behandling, resultat og social prognose, af V. Oram. Thèse. Universitets forlaget i Aarhus, 1952; 1 fasc. 25 cm.

Fosfolipoid fraktionerne i plasma en metodologisk og klinisk-eperimentel undersøgelse, af VILLY POSBORG PETERSEN. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1952; 1 fasc. 25 cm.

Sammenlignende undersøgelser over resorptionen i Tyktarmen og den distale del af Tyndtarmen, af SVEND ERIK BUDOLFSEN. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1952; 1 fasc. 25 cm.

Eksperimentelle undersøgelser over dihydrostreptomycins virkining på colibaciller in vitro, af AKSEL STENDERUP. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1954; 1 fasc. 25 cm.

Det cellulaere aminosyrestofskifte under mitosen med soerligt henblik på forskellige aminosyrers indflydelse pa celledelingen in vitro, af JØRGEN KIELER. Thèse. København, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, 1954; 1 fasc. 25 cm.

Thrombopoiesis a study on the origin of the Blood Platelets and on the Thrombopoiesis of the Bone Marrow in the normal subject and in Various Thrombocytopenie States, by FLEMMING KISSMEYER-NIELSEN. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1954; 1 fasc. 25 cm.

Acta psychiatrica et neurologica scandinavica. Supplementum n° 88. *Studies on the central Pathway of the flexion reflex in Man and Animal* and *Changes in the Reflex Threshold and the Circulation after Spinal Transection*, by EJNER PEDERSEN. Thèse Universitetsforlaget i Aarhus, 1954; 1 fasc. 25 cm.

Undersøgelser over dextrans indvirkning paa serums kolloidosmotiske tryk hos Kaniner, af FRANTZ OLE NEIDHARDT. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1955; 1 fasc. 25 cm.

Smertetilstande i Skulderledsregionen og deres relation til periarthrosis humeroscapularis en klinisk undersøgelse, af ERIK F. MOGENSEN. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1955; 1 fasc. 25 cm.

Studies on the acoustic stapedius reflex in man. Measurements of the acoustic impedance of the tympanic membrane in normal individuals and in patients with peripheral facial palsy, by OTTO JEPSEN. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1955; 1 fasc. 25 cm.

Pulmonary resection for tuberculosis, by POUL OTTOSEN. Thèse. Universitetsforlaget i Aarhus, 1955; 1 fasc. 25 cm.

Studier over animalsk lactase, af N. S. C. HEILSKOV. Thèse. Munksgaard, 1956; 1 fasc. 25 cm.

Tabeller og kurver til Kirurgisk klimakterium specult med henblik pa psyko-sexuelle forhold, of A. LETH PEDERSEN. Thèse. Aarhus Amtstidendes Bogtrykkeri, 1956; 1 fasc. 25 cm.

Kirurgisk Klimakterium specielt med henblik pa psyko-sexuelle forhold, af A. LETH PEDERSEN. Thèse. Aarhus, 1956; 1 fasc. 25 cm.

Acta ophtalmologica. Suppl. 46. *The Basophilic substances in the Retinal ganglion Cells and the Physiological activity changes in These Cells*, by KNUD BEEH. Thèse. Copenhague, Ejnar Munksgaard, 1957; 1 fasc. 24 cm.

Revision de la teoria de la Relatividad, por JULIO PALACIOS. Madrid, 1957; 1 fasc. 25 cm.

Revue anthropologique. Nouvelle série, n° 3. *Les variations sexuelles du squelette céphalique*, par PIERRE VASSAL. Paris, Librairie Jouve, 1957; 1 fasc. 25 cm.

Brachycéphalie, goître et terrain granitique, par PIERRE VASSAL, in *Revue de pathologie générale et de physiologie clinique*, n° 688, 1957. Paris, Pacomhy, 1957; 1 fasc. 24 cm.

Publications du Muséum national d'histoire naturelle, n° 17. *Travaux du laboratoire de la Jaysinia a Samoëns* (*Haute-Savoie*). *Recueil* publié sous la direction de HENRI HUMBERT. Paris. Éditions du Muséum, 1957; 1 fasc. 25 cm.

André Mayer, 1875-1956. Abbeville, F. Paillart, 1957; 1 fasc. 23, 5 cm.

Traité du calcul des probabilités et de ses applications, par ÉMILE BOREL. Tome I. *Les Principes de la statistique mathématique*, par RENÉ RISSER et C. ÉMILE TRAYNARD. Livre II. *Corrélations. Séries chronologiques.* Deuxième édition revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1958; 1 vol. 24 cm.

Academia republicii populare romîne. Ministerul sànàtàtii. Societatea stiintelor medicale. *Lucràrile congresului national de stiinte medicale.* I. *Rapoarte.* Bucarest, Editura Academiei republicii populare romine, 1957; 1 vol. 24,5 cm.

Fisika delenia atomnyk iader. Mockba, 1957; 1 fasc. 22 cm.

Ouskoïteli elementariryk tchastits. Mockba, 1957; 1 fasc. 22 cm.

Une erreur de mise en pages s'est produite dans le numéro du 6 janvier 1958 des COMPTES-RENDUS.

Le feuillet ci-joint est destiné à remplacer celui qui comporte l'erreur.

Pour la Section de Botanique. — M. **Charles Killian**, le 27 janvier, à Récife (Brésil);

— M. **René de Litardière**, le 24 octobre, à Mazières-en-Gâtine (Deux-Sèvres).

Pour la Section de Zoologie. — M. **Paul de Peyerimhoff de Fontenelle**, le 8 janvier, à Paris.

Pour la Section de Médecine et Chirurgie. — M. **Jean Giaja**, le 1er octobre, à Belgrade;

— M. **Louis Gallavardin**, le 2 décembre, à Lyon.

Pour les Sections des Académiciens libres et des Applications de la science à l'industrie. — **Lord Cherwell of Oxford**, le 3 juillet, à Oxford (Angleterre);

— M. **Irving Langmuir**, le 16 août, à Falmouth (Massachusetts).

Correspondants élus depuis le 1er janvier 1957.

Pour la Section de Géométrie. — M. **Salomon Lefschetz**, le 25 novembre, à Princeton (New Jersey), en remplacement de Sir **Edmund Whittaker**, décédé;

— M. **John Edensor Littlewood**, le 25 novembre, à Cambridge (Angleterre), en remplacement de M. **Maurice Fréchet**, élu membre de la section.

Pour la Section de Physique. — M. **Victor Frederick Weisskopf**, le 1er juillet, à Cambridge (Massachusetts), en remplacement de M. **Robert Andrews Millikan**, décédé;

— M. **Dmitry Skobeltzyne**, le 1er juillet, à Moscou, en remplacement de M. **Georges Reboul**, décédé;

— M. **Auguste Rousset**, le 1er juillet, à Bordeaux, en remplacement de M. **René de Mallemann**, élu membre non résidant.

Pour la Section de Chimie. — M. **Max Mousseron**, le 1er juillet, à Montpellier, en remplacement de M. **Charles Courtot**, décédé;

— M. **Albert Tian**, le 1er juillet, à Marseille, en remplacement de M. **Paul Walden**, décédé;

Pour la Section de Géologie. — M. **André Duparque**, le 18 février, à Lille, en remplacement de M. **Pierre Pruvost**, élu Membre de la section;

— M. **Bernard Peyer**, le 18 février, à Zurich, en remplacement de Sir **Lawrence Bragg**, élu Associé étranger.

Pour la Section de Médecine et Chirurgie. — M. **Paul Santy**, le 18 mars, à Lyon, en remplacement de M. **Léon Bérard**, décédé.

Pour les Sections des Académiciens libres et des Applications de la science à l'industrie. — M. **Balthasar Van der Pol**, le 6 mai, à Eindhoven (Pays-Bas);

— M. **Édouard Houdremont**, le 6 mai, à Essen (Allemagne).

Correspondants à remplacer.

Pour la Section d'Astronomie. — M. **Henry Norris Russell**, mort à Princeton, (New Jersey) le 18 février 1957;

— M. **Carl Størmer**, mort à Oslo, le 13 août 1957.

Pour la Section de Physique. — Sir **John Townsend**, mort à Oxford (Angleterre), le 16 février 1957.

Pour la Section de Géologie. — M. **Gaston Delépine**, élu Membre non résidant, le 19 novembre 1956;

— M. **Léon Moret**, élu Membre non résidant, le 25 novembre 1957.

Pour la Section de Botanique. — M. **Charles Killian**, mort à Récife (Brésil), le 27 janvier 1957;

— M. **René de Litardière**, mort à Mazières-en-Gâtine (Deux-Sèvres), le 24 octobre 1957.

Pour la Section de Zoologie. — M. **Paul de Peyerimhoff de Fontenelle**, mort à Paris, le 2 janvier 1957.

Pour la Section de Médecine et Chirurgie. — M. **Jean Giaja**, mort à Belgrade, le 1er octobre 1957;

— M. **Louis Gallavardin**, mort à Lyon, le 2 décembre 1957.

Pour la Section des Académiciens libres et des Applications de la science à l'industrie. — Lord **Cherwell of Oxford**, mort à Oxford (Angleterre), le 3 juillet 1957;

— M. **Irving Langmuir**, mort à Falmouth (Massachusetts), le 16 août 1957.

M. **Léon Binet**, Président sortant s'exprime en ces termes :

Mes chers Confrères,

Il y a deux ans, vous m'avez fait l'honneur de m'appeler à un siège — provisoire — de votre bureau : mon mandat s'achève aujourd'hui et je voudrais vous remercier très vivement pour la grande satisfaction éprouvée ici même.

Satisfaction de voir de près à l'œuvre nos deux secrétaires perpétuels, M. Louis de Broglie et M. Bobert Courrier dont j'ai admiré la sagesse, la compétence, l'activité.

Satisfaction d'avoir été en amicale coopération, hier avec M. Armand de Gramont, aujourd'hui avec M. Paul Montel.

Satisfaction d'observer le travail de nos archivistes, M. et Mme Pierre Gauja et de nos secrétaires de séance, MM. Gérard Petiau et Didier Bertrand, tous réalisant cet effort d'équipe qui aboutit à l'impression rapide de nos *Comptes rendus*.

TABLE DES ARTICLES

N° 1.

Séance du 6 Janvier 1958.

DÉSIGNATIONS.

CORRESPONDANCE.

CORRESPONDANCE (*suite*).

TABLE DES ARTICLES

N° 2.

Séance du **15** Janvier **1958**.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PLIS CACHETÉS.

CORRESPONDANCE.

TABLE DES ARTICLES

N° 3

Séance du 20 Janvier 1958

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

CORRESPONDANCE.

CORRESPONDANCE (*suite*).

TABLE DES ARTICLES

N° 4.

Séance du **27** Janvier **1958.**

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PRÉSENTATIONS.

DÉSIGNATIONS.

CORRESPONDANCE.